Buana Matematika : Jurnal Ilmiah Matematika dan Pendidikan Matematika
p-ISSN : 2088-3021
e-ISSN : 2598-8077
Website : http://jurnal.unipasby.ac.id/index.php/buana_matematika
Email : buana_matematika@unipasby.ac.id

Gelanggang $\mathcal{S}$-Prima Penuh

Andi Muhammad Anwar[1*], Irmatul Hasanah[2], Mukhammad Solikhin[3], Nanda Arista Rizki[4]
[1]Matematika, Universitas Hasanuddin, Makassar, Indonesia;
*andimuhammadanwar@unhas.ac.id
[2] Perbankan Syariah, UIN Sultan Maulana Hasanuddin Banten, Banten, Indonesia;
irmatul.hasanah@uinbanten.ac.id
[3]Matematika, Universitas Negeri Malang, Malang, Indonesia;
mukhammad.solikhin.fmipa@um.ac.id
[4]Pendidikan Matematika, Universitas Mulawarman, Samarinda, Indonesia;
nanda.arista@fkip.unmul.ac.id

Abstrak. Studi ini memperkenalkan dan mengkarakterisasi konsep gelanggang $\mathcal{S}$-prima penuh dalam teori gelanggang komutatif. Dengan menggeneralisasi gagasan ideal prima menggunakan subhimpunan multiplikatif, para penulis menetapkan kondisi-kondisi di mana suatu gelanggang komutatif dianggap sebagai $\mathcal{S}$-prima penuh. Beberapa lema dan teorema disajikan untuk memformalkan konsep ini, yang menunjukkan sifat-sifat struktural gelanggang seperti idempoten dan hubungannya dengan ideal. Studi ini juga menyajikan contoh-contoh untuk mengilustrasikan temuan-teori tersebut. Eksplorasi teoretis ini memberikan pemahaman dasar yang dapat dikembangkan lebih lanjut dalam penelitian aljabar.
Kata Kunci: Gelanggang Komutatif, Gelanggang $\mathcal{S}$-Prima Penuh, Subhimpunan Multiplikatif, Ideal S-prima.

Abstract. This study introduces and characterizes the concept of fully $\mathcal{S}$-prime rings in the context of commutative ring theory. By generalizing the notion of prime ideals using multiplicative subsets, the authors define conditions under which a commutative ring is considered fully $\mathcal{S}$-prime. Several lemmas and theorems are presented to formalize this concept, demonstrating key structural properties such as idempotency and relationships between ideals. The study also offers examples to illustrate these theoretical findings. This theoretical exploration provides a foundational understanding that can be extended to further algebraic research.
Keywords: Commutative Rings, Fully $\mathcal{S}$-Prime Rings, Multiplicative Subset, S-Prime Ideal.

Pendahuluan

Struktur ideal pada gelanggang komutatif merupakan salah satu teori dalam aljabar abstrak yang banyak dikaji. Salah satu kajian dalam struktur ideal adalah ideal prima. Ideal sejati P dari suatu gelanggang komutatif R yang memuat elemen identias perkalian dikatakan ideal prima apabila untuk setiap $a, b \in R$ yang memenuhi $ab \in P$ maka $a \in P$ atau $b \in P$. Sebagai contoh, ideal (p) di $\mathbb{Z}$ dimana p adalah bilangan prima, merupakan ideal prima.

Penelitian gelanggang prima penuh diperkenalkan oleh Tsutsui & Blair (1994) yang merupakan perluasan dari gelanggang prima. Suatu gelanggang dikatakan gelanggang prima penuh apabila setiap ideal sejatinya adalah ideal prima. Lebih khususnya jika sebuah gelanggang komutatif adalah gelanggang prima penuh, maka gelanggang tersebut adalah lapangan. Contohnya $\mathbb{Z}_p$ dengan p adalah bilangan prima merupakan gelanggang komutatif yang merupakan gelanggang prima penuh dan juga merupakan lapangan. Konsep ini selanjutnya dikembangkan ke area modul seperti Beachy & Medina-Bárcenas (2020) membahas modul prima penuh dan modul semiprima penuh dan area semimodul oleh Anwar dkk. (2022) mengerjakan semimodul prima penuh pada jumlahan langsung dari subsemimodul prima.

Selanjutnya, Hamed & Malek (2020) memperkenalkan konsep ideal prima yang diperumum yang disebut ideal S-prima. Misalkan R gelanggang komutatif dengan unsur satuan, P ideal sejati di R dan S adalah subhimpunan multiplikatif (tertutup atas perkalian) di R dan memenuhi $S \cap P = \emptyset$. Ideal P dikatakan ideal S-prima apabila terdapat $s \in S$ sehingga untuk setiap $a, b \in R$ yang memenuhi $ab \in P$ maka $sa \in P$ atau $sb \in P$. Setiap ideal prima di R merupakan ideal S-prima namun sebaliknya tidak memenuhi.

Setelah itu, para peneliti mulai mengeksplorasi konsep S-prima dalam struktur aljabar lainnya. Şengelen Sevim dkk. (2019) memperkenalkan konsep submodul S-prima dan modul bebas torsi, Farzalipour dkk. (2023) mengkaji submodul hampir S-prima serta mengkarakterisasi sifat-sifatnya secara lebih mendalam, serta Duraisamy & Varadharajan (2024) mengkaji kaitan antara ideal S-prima dengan konsep *Lattice*.

Gelanggang prima penuh yang bersifat komutatif merupakan lapangan, sehingga hal ini membuat gelanggang komutatif yang prima penuh menjadi sangat terbatas secara struktural. Oleh karena itu, gagasan mengenai gelanggang S -prima penuh menawarkan generalisasi baru yang layak untuk dieksplorasi lebih lanjut. Studi ini memperkenalkan konsep gelanggang S-prima penuh dalam konteks aljabar komutatif, mengkarakterisasi sifat-sifat strukturalnya, dan menetapkan lema-lema penting yang menghubungkannya dengan ideal prima klasik dan gelanggang prima penuh. Struktur dan sifat

p-ISSN : 2088-3021
e-ISSN : 2598-8077

dari ideal S-prima di daerah ideal utama sebagaimana dibahas oleh Aqalmoun (2023) dan penerapan konsep ideal S-prima pada graf seperti yang dikerjakan oleh Kalamani & Mythily (2023), turut memberikan wawasan lebih lanjut mengenai motivasi dari definisi gelanggang $\mathcal{S}$-prima penuh.

Metode

Penelitian ini menggunakan pendekatan teoretis dalam bidang aljabar abstrak, khususnya teori gelanggang Pendekatan ini dilakukan melalui beberap tahapan sistematis, yaitu: studi litearur, perumusan definisi baru, pengembangan lema dan teorema, dan analisis pembuktian. Contoh-contoh ilustratif digunakan untuk menunjukkan penerapan kondisi-kondisi tersebut, yang didukung oleh pembuktian.

Studi ini sangat bergantung pada deduksi logis dan metode teori himpunan untuk memvalidasi sifat-sifat dari gelanggang tersebut. Secara khusus, penelitian ini berfokus pada pembuktian karakteristik seperti idempoten dan subhimpunan multiplikatif dalam gelanggang $\mathcal{S}$-prima penuh. Beberapa lema dan teorema baru dikembangkan untuk memperdalam pemahaman terhadap perilaku struktural entitas aljabar ini.

Hasil dan Pembahasan

Gelanggang komutatif yang digunakan pada penelitian ini adalah gelanggang komutatif dengan unsur satuan. Selanjutnya diberikan definisi dari gelanggang $\mathcal{S}$-prima penuh.

Definisi 1. Misalkan R gelanggang komutatif dan $\mathcal{S}$ keluarga subhimpunan multiplikatif di R. Gelanggang R merupakan gelanggang $\mathcal{S}$-prima penuh apabila setiap ideal sejati P di R terdapat subhimpunan multiplikatif $S \in \mathcal{S}$ dan memenuhi $S \cap P = \emptyset$, sehingga ideal P merupakan ideal S-prima.

Contoh 1. Gelanggang $\mathbb{Z}_6$ merupakan gelanggang $\mathcal{S}$-prima penuh. Perhatikan bahwa, ideal dari $\mathbb{Z}_6$ adalah $P_1 = \{0\}, P_2 = \{0,3\}, P_3 = \{0,2,4\}$. Jelas bahwa P_2 dan P_3 merupakan ideal prima sehingga juga merupakan ideal S-prima. Ideal P_1 bukan ideal prima karena $2 \cdot 2 = 0$, tetapi $2 \notin P_1$. Namun untuk subhimpunan multiplikatif $S = \{4\}$, diperoleh bahwa untuk sebarang $a, b \in \mathbb{Z}_6, ab = 0$, diperoleh bahwa a atau b habis dibagi 3 sehingga $4a \in P_1$ atau $4b \in P_1$. Akibatnya, P_1 ideal S-prima. Jadi, $\mathbb{Z}_6$ merupakan gelanggang $\mathcal{S}$-prima penuh. Gelanggang $\mathbb{Z}_4$ bukan gelanggang $\mathcal{S}$-prima penuh karena ideal $\{0\}$ bukan ideal S-prima. Hal ini dikarenakan untuk kasus $2 \cdot 2 = 0$, tidak ada subhimpunan multiplikatif $S \cap \{0\} = \emptyset$ yang membuat $2s = 0$ untuk $s \in S$.

p-ISSN : 2088-3021
e-ISSN : 2598-8077

Definisi gelanggang $\mathcal{S}$-prima penuh di atas tidak menandakan bahwa subhimpunan multiplikatif yang dipilih tidak harus sama untuk membuat semua gelanggangnya menjadi ideal S-prima. Kecuali untuk gelanggang sederhana yang ideal sejatinya hanyalah $\{0\}$. Lema berikut memberikan bukti untuk pernyataan di atas.

Lema 1. Misalkan R gelanggang komutatif tidak sederhana. Jika R gelanggang $\mathcal{S}$-prima penuh maka tidak terdapat subhimpunan multiplikatif yang membuat semua ideal sejati di R merupakan ideal S-prima.

Bukti. Misalkan R gelanggang $\mathcal{S}$-prima penuh. Andaikan terdapat subhimpunan multiplikatif $S \in \mathcal{S}$ sedemikian sehingga setiap ideal P di R berlaku $S \cap P = \emptyset$, P ideal S-prima. Karena $S \neq \emptyset$ maka terdapat $x \in S$ sehingga $P_x = \{ax : a \in R\}$ merupakan ideal di R selain P. Karena R merupakan gelanggang $\mathcal{S}$-prima penuh, sehingga P_x merupakan ideal S-prima dan $S \cap P_x = \emptyset$. Kontradiksi karena $x \in S \cap P_x$. Jadi terbukti tidak terdapat subhimpunan multiplikatif $S \in \mathcal{S}$ yang membuat semua ideal di R merupakan ideal S-prima. Hal ini serupa dengan setiap ideal di R merupakan ideal S-prima dengan subhimpunan multiplikatifnya tidak semuanya sama. ■

Contoh 2. Pada Contoh 1, gelanggang $\mathbb{Z}_6$, P_1 adalah ideal S_1-prima dengan $S_1 = \{4\}$ kemudina P_2 dan P_3 adalah ideal S_2-prima dengan $S_2 = \{1\}$.

Selanjutnya dijelaskan karakteristik dari gelanggang $\mathcal{S}$-prima penuh dengan menggunakan teorema yang telah diberikan oleh Hamed dan Malek.

Teorema 1 (Hamed & Malek, 2020). Misalkan R merupakan gelanggang komutatif, $S \subseteq R$ merupakan subhimpunan multiplikatif, dan P adalah ideal di R sedemikian sehingga $S \cap P = \emptyset$. Maka P merupakan S-prima jika dan hanya jika terdapat $s \in S$ sedemikian sehingga untuk setiap ideal I, J di R, jika $IJ \subseteq P$, maka $sI \subseteq P$ atau $sJ \subseteq P$.

Teorema 2. Misalkan R gelanggang komutatif. Jika R adalah gelanggang $\mathcal{S}$-prima penuh maka setiap idealnya idempoten.

Bukti. Ambil P ideal di R. Jelas bahwa P^2 juga merupakan ideal di R. Karena R merupakan gelanggang $\mathcal{S}$-prima penuh, maka terdapat $S \in \mathcal{S}$ subhimpunan multiplikatif di R dengan $S \cap P^2 = \emptyset$ sehingga P^2 ideal S-prima. Ambil $x \in P$, maka $x^2 \in P^2$. Karena P^2 ideal S-prima akibatnya terdapat $s \in S$ sehingga untuk setiap $x \in P$, $sx \in P^2$. Akibatnya, $P \subseteq sP^2$. Jelas bahwa $sP^2 \subseteq P^2$ dan

p-ISSN : 2088-3021
e-ISSN : 2598-8077

$P^2 \subseteq P$. Maka, diperoleh $P^2 = P$. Jadi, terbukti bahwa setiap idealnya idempoten. ■

Contoh 3. Pada Contoh 1, gelanggang $\mathbb{Z}_6$, $P_1 = \{0\}$, $P_2 = \{0,3\}$ dan $P_3 = \{0,2,4\}$ merupakan ideal yang bersifat idempoten.

Teorema 3. Misalkan R adalah gelanggang komutatif. Jika R merupakan gelanggang $\mathcal{S}$-prima penuh maka untuk setiap P_1 dan P_2 ideal di R terdapat $s \in S'$ dengan $S' \in \mathcal{S}$ adalah subhimpunan multiplikatif yang saling lepas dengan $P_1 \cap P_2$ sehingga $sP_1 \subseteq P_2$ atau $sP_2 \subseteq P_1$.

Bukti. Misalkan R adalah gelanggang $\mathcal{S}$-prima penuh. Ambil P_1 dan P_2 ideal di R. Jelas $P_1 \cap P_2$ merupakan ideal di R. Karena R gelanggang S-prima penuh maka terdapat $S' \subseteq R$ subhimpunan multiplikatif yang saling lepas dengan $P_1 \cap P_2$ sehingga $P_1 \cap P_2$ ideal S'-prima. Jelas, $P_1P_2 \subseteq P_1 \cap P_2$. Berdasarkan Teorema 1, terdapat $s \in S'$ sehingga $sP_1 \subseteq P_1 \cap P_2$ atau $sP_2 \subseteq P_1 \cap P_2$. Karena $P_1 \cap P_2 \subseteq P_1$ dan $P_1 \cap P_2 \subseteq P_2$, maka diperoleh $sP_1 \subseteq P_2$ atau $sP_2 \subseteq P_1$. ■

Hasil berikutnya adalah mengidentifikasi gelanggang $\mathbb{Z}_n$ yang memenuhi gelanggang $\mathcal{S}$-prima penuh.

Lema 2. Gelanggang $\mathbb{Z}_n$ merupakan gelanggang $\mathcal{S}$-prima penuh jika $n = p_1.p_2 \dots .p_k$, dengan $k \geq 1$ dan $p_1, p_2, \dots, p_k$ merupakan bilangan prima.

Bukti. Misalkan $R = \mathbb{Z}_{p_1.p_2 \dots .p_k}$ dengan $k \geq 1$ dan $p_1, p_2, \dots, p_k$ merupakan bilangan prima. Perhatikan bahwa $P_a = aR$ dengan $a = x_1x_2 \dots x_l$ dan $x_1, \dots, x_l \in \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$, $l \geq 1$. Jelas bahwa P merupakan ideal sejati dari R. Selanjutnya akan dibuktikan ideal lain selain P_a adalah R. Misalkan J ideal selain P_a sehingga terdapat $t \in J$ sedemikian sehingga $FPB(a,t) = 1$. Berdasarkan teorema Euler, (Hardy dkk., 2008), diperoleh $1 \in J$. Akibatnya $J = R$. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa P_a merupakan ideal S-prima. Perhatikan bahwa P_q dengan $q \in \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ merupakan ideal prima sehingga juga merupakan ideal S-prima. Selanjutnya, untuk $P_a = aR$ dengan $a = x_1x_2 \dots x_l$ dan $x_1, \dots, x_l \in \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$, $2 \leq l \leq k$. Pilih $S_a = \left\{\left(\frac{a}{x_d}\right)^n : n \in \mathbb{N}\right\}$, dengan $d \in \{1,2, \dots, l\}$. Pilih $s = \frac{a}{x_d}$. Ambil $u, v \in R$ yang memenuhi $uv \in P_a$. Akibatnya $x_d|u$ atau $x_d|v$. Sehingga diperoleh $su \in P_a$ atau $sv \in P_a$. Jadi terbukti P_a ideal S-prima. ■

Hasil terakhir dibuktikan keterkaitan antara gelanggang prima penuh dengan gelanggang $\mathcal{S}$-prima penuh.

p-ISSN : 2088-3021
e-ISSN : 2598-8077

Lema 3. Misalkan R gelanggang komutatif. Jika R gelanggang prima penuh maka R merupakan gelanggang $\mathcal{S}$-prima penuh.

Bukti. Misalkan R gelanggang prima penuh. Ambil sebarang ideal sejati P di R dan $a \in R\backslash P$. Karena R gelanggang prima penuh sehingga P ideal prima. Akibatnya $a^2 \notin P$. Jadi, dapat dibentuk subhimpunan multiplikatif $S = \{a^n : n \in \mathbb{N}\}$ sehingga memenuhi $P \cap S = \emptyset$. Selanjutnya pilih $x \in S$ dan $a, b \in R$ yang memenuhi $xa \notin P$ dan $xb \notin P$. Karena P ideal prima maka $x^2ab \notin P$. Selanjutnya, andaikan $ab \in P$ sehingga $x^2ab \in P$. Hal ini kontradiksi, sehingga diperoleh $ab \notin P$. Akibatnya P merupakan ideal S-prima. Jadi, R merupakan gelanggang $\mathcal{S}$-prima penuh. ■

Simpulan

Studi ini telah memperkenalkan dan mengkarakterisasi konsep gelanggang $\mathcal{S}$-prima penuh dengan menyajikan serangkaian lema dan teorema kunci yang mendefinisikan sifat strukturalnya. Kesimpulan utama dari penelitian ini adalah bahwa setiap gelanggang prima penuh pada dasarnya juga merupakan cincin yang sepenuhnya $\mathcal{S}$-prima. Kami telah menetapkan kriteria yang tepat untuk mengidentifikasi gelanggang $\mathcal{S}$-prima penuh dengan memperhatikan idealnya.

Penelitian di masa depan dapat memperluas temuan ini dengan mengeksplorasi pendekatan komputasional untuk mengidentifikasi gelanggang $\mathcal{S}$-prima penuh serta meneliti potensi aplikasinya dalam geometri aljabar dan teori bilangan. Saran untuk penelitian selanjutnya mencakup: menyelidiki peran gelanggang $\mathcal{S}$-prima penuh dalam topologi aljabar; menganalisis hubungan antara gelanggang $\mathcal{S}$-prima penuh dengan struktur aljabar lainnya seperti modul dan varian-varian aljabar.

Daftar Pustaka

Anwar, A. M., Garminia, H., & Irawati, I. (2022). Direct Sums of Prime Subsemimodules. *Jurnal Matematika, Statistika dan Komputasi*, *18*(2), 169–173. https://doi.org/10.20956/j.v18i2.16669

Aqalmoun, M. (2023). S-Prime Ideals In Principal Domain. *J. Indones. Math. Soc*, *29*(1), 93-98.

Beachy, J. A., & Medina-Bárcenas, M. (2020). Fully Prime Modules And Fully Semiprime Modules. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, *57*(5), 1177–1193. https://doi.org/10.4134/BKMS.b190864

Duraisamy, K., & Varadharajan, M. (2024). Some New Results on S-prime Ideals of a Finite Commutative Ring as S-meet Semilattice. *Applied and*

p-ISSN : 2088-3021
e-ISSN : 2598-8077

Computational Mathematics, *13*(4), 105–110. https://doi.org/10.11648/j.acm.20241304.14

Farzalipour, F., Ghaseminejad, R., & Sayedsadeghi, M. S. (2023). On Almost S-Prime Submodules. *Journal of Algebra and Related Topics, 11*(1), 27-42.

Hamed, A., & Malek, A. (2020). S-Prime Ideals Of A Commutative Ring. *Beitrage zur Algebra und Geometrie*, *61*(3), 533–542. https://doi.org/10.1007/s13366-019-00476-5

Hardy, G. H., Wright, E. M., Heath-Brown,] D R, & Silverman, J. H. (2008). An Introduction to the Theory of Numbers (6th ed.). Oxford University Press.

Kalamani, D., & Mythily, C. V. (2023). S-Prime Ideal Graph Of A Finite Commutative Ring. *Advances and Applications in Mathematical Sciences, 22*(4), 861-872.

Şengelen Sevim, E., Arabaci, T., Tekir, Ü., & Koç, S. (2019). On S-prime submodules. *Turkish Journal of Mathematics*, *43*(2), 1036–1046. https://doi.org/10.3906/mat-1808-50

Tsutsui, H., & Blair, W. D. (1994). Fully Prime Rings. *Communications in Algebra*, *22*(13), 5389–5400. https://doi.org/10.1080/00927879408825136

p-ISSN : 2088-3021
e-ISSN : 2598-8077