Silviana Maya Purwasih

Gelanggang S-Prima Penuh

3% Overall Similarity

The combined total of all matches, including overlapping sources, for each database.

Filtered from the Report

- Bibliography

Top Sources

3% Internet sources
1% Publications
0% Submitted works (Student Papers)

Integrity Flags

0 Integrity Flags for Review

No suspicious text manipulations found.

Our system's algorithms look deeply at a document for any inconsistencies that would set it apart from a normal submission. If we notice something strange, we flag it for you to review.

A Flag is not necessarily an indicator of a problem. However, we'd recommend you focus your attention there for further review.

Top Sources

3%		Internet sources
1%		Publications
0%		Submitted works (Student Papers)

Top Sources

The sources with the highest number of matches within the submission. Overlapping sources will not be displayed.

1	Internet	manualzz.com	<1%
2	Publication	Kalfin Muchtar, Jullia Titaley, Mans Mananohas. "Integral Baire-1 Stieltjes, Hensto...	<1%
3	Publication	Sunaryono, Ahmad Taufiq, Edy Giri Rahman Putra, Atsushi Okazawa et al. " Small-...	<1%
4	Internet	repository.unhas.ac.id	<1%
5	Internet	pjm.ppu.edu	<1%
6	Internet	repository.uinbanten.ac.id	<1%
7	Internet	www.scribd.com	<1%

Gelanggang $\mathcal{S}$-Prima Penuh

Andi Muhammad Anwar[1*], Irmatul Hasanah[2], Mukhammad Solikhin[3], Nanda Arista Rizki[4]

[1]Matematika, Universitas Hasanuddin, Makassar, Indonesia;
*andimuhammadanwar@unhas.ac.id
[2] Perbankan Syariah, UIN Sultan Maulana Hasanuddin Banten, Banten, Indonesia;
irmatul.hasanah@uinbanten.ac.id
[3]Matematika, Universitas Negeri Malang, Malang, Indonesia;
mukhammad.solikhin.fmipa@um.ac.id
[4]Pendidikan Matematika, Universitas Mulawarman, Samarinda, Indonesia;
nanda.arista@fkip.unmul.ac.id

Info Artikel: Dikirim: --- ; Direvisi: ---; Diterima: --- [diisi oleh Editor Jurnal]

Abstrak. Studi ini memperkenalkan dan mengkarakterisasi konsep gelanggang $\mathcal{S}$-prima penuh dalam teori gelanggang komutatif. Dengan menggeneralisasi gagasan ideal prima menggunakan subhimpunan multiplikatif, para penulis menetapkan kondisi-kondisi di mana suatu gelanggang komutatif dianggap sebagai $\mathcal{S}$-prima penuh. Beberapa lema dan teorema disajikan untuk memformalkan konsep ini, yang menunjukkan sifat-sifat struktural gelanggang seperti idempoten dan hubungannya dengan ideal. Studi ini juga menyajikan contoh-contoh untuk mengilustrasikan temuan-teori tersebut. Eksplorasi teoretis ini memberikan pemahaman dasar yang dapat dikembangkan lebih lanjut dalam penelitian aljabar.
Kata Kunci: Gelanggang Komutatif, Gelanggang $\mathcal{S}$-Prima Penuh, Subhimpunan Multiplikatif, Ideal S-prima.

Abstract. This study introduces and characterizes the concept of fully $\mathcal{S}$-prime rings in the context of commutative ring theory. By generalizing the notion of prime ideals using multiplicative subsets, the authors define conditions under which a commutative ring is considered fully $\mathcal{S}$-prime. Several lemmas and theorems are presented to formalize this concept, demonstrating key structural properties such as idempotency and relationships between ideals. The study also offers examples to illustrate these theoretical findings. This theoretical exploration provides a foundational understanding that can be extended to further algebraic research.
Keywords: Commutative Rings, Fully $\mathcal{S}$-Prime Rings, Multiplicative Subset, S-Prime Ideal.

Pendahuluan

Struktur ideal pada gelanggang komutatif merupakan salah satu teori dalam aljabar abstrak yang banyak dikaji. Salah satu kajian dalam struktur ideal adalah ideal prima. Ideal sejati P dari suatu gelanggang komutatif R yang memuat elemen identias perkalian dikatakan ideal prima apabila untuk setiap

$a, b \in R$ yang memenuhi $ab \in P$ maka $a \in P$ atau $b \in P$. Sebagai contoh, ideal (p) di $\mathbb{Z}$ dimana p adalah bilangan prima, merupakan ideal prima.

Penelitian gelanggang prima penuh diperkenalkan oleh Blair dan Tsutsui pada tahun 1994 yang merupakan perluasan dari gelanggang prima. Suatu gelanggang dikatakan gelanggang prima penuh apabila setiap ideal sejatinya adalah ideal prima. Lebih khususnya jika sebuah gelanggang komutatif adalah gelanggang prima penuh, maka gelanggang tersebut adalah lapangan (Blair dan Tsutsui, 1994). Contohnya $\mathbb{Z}_p$ dengan p adalah bilangan prima merupakan gelanggang komutatif yang merupakan gelanggang prima penuh dan juga merupakan lapangan. Konsep ini selanjutnya dikembangkan oleh Ghaseminejad dan Farzalipour (2020) mengenai perumuman di submodul prima dan Chhitti dan Dabbek (2021) mengenai pengembangan lebih lanjut dari ideal prima di gelanggang komutatif.

Selanjutnya pada tahun 2019, Ahmad Hamed dan Achraf Malem memperkenalkan konsep ideal prima yang diperumum yang disebut ideal S-prima. Misalkan R gelanggang komutatif dengan unsur satuan, P ideal sejati di R dan S adalah subhimpunan multiplikatif (tertutup atas perkalian) di R dan memenuhi $S \cap P = \emptyset$. Ideal P dikatakan ideal S-prima apabila terdapat $s \in S$ sehingga untuk setiap $a, b \in R$ yang memenuhi $ab \in P$ maka $sa \in P$ atau $sb \in P$ (Ahmad Hamed dan Achraf Malem, 2019). Setiap ideal prima di R merupakan ideal S-prima namun sebaliknya tidak memenuhi.

Setelah itu, para peneliti mulai mengeksplorasi konsep S-prima dalam struktur aljabar lainnya. Sevim et al. (2019) memperkenalkan konsep submodul S-prima dan modul bebas torsi, sedangkan Farzalipour dkk (2023) mengkaji submodul hampir S-prima serta mengkarakterisasi sifat-sifatnya secara lebih mendalam.

Gelanggang prima penuh yang bersifat komutatif merupakan lapangan, sehingga hal ini membuat gelanggang komutatif yang prima penuh menjadi sangat terbatas secara struktural. Oleh karena itu, gagasan mengenai gelanggang $\mathcal{S}$ -prima penuh menawarkan generalisasi baru yang layak untuk dieksplorasi lebih lanjut. Studi ini memperkenalkan konsep gelanggang $\mathcal{S}$-prima penuh dalam konteks aljabar komutatif, mengkarakterisasi sifat-sifat strukturalnya, dan menetapkan lema-lema penting yang menghubungkannya dengan ideal prima klasik dan gelanggang prima penuh. Struktur dan sifat dari ideal prima lemah, sebagaimana dibahas oleh Nasr-Isfahani dan Tekir (2021), turut memberikan wawasan lebih lanjut mengenai motivasi dari definisi gelanggang $\mathcal{S}$-prima penuh.

Metode

Penelitian ini menggunakan pendekatan teoretis dengan mendefinisikan konsep gelanggang $\mathcal{S}$-prima penuh dan menurunkan kondisi-kondisi yang diperlukan melalui perumusan lema dan teorema. Contoh-contoh ilustratif digunakan untuk menunjukkan penerapan kondisi-kondisi tersebut, yang didukung oleh pembuktian.

Studi ini sangat bergantung pada deduksi logis dan metode teori himpunan untuk memvalidasi sifat-sifat dari gelanggang tersebut. Secara khusus, penelitian ini berfokus pada pembuktian karakteristik seperti idempoten dan subhimpunan multiplikatif dalam gelanggang $\mathcal{S}$-prima penuh. Beberapa lema dan teorema baru dikembangkan untuk memperdalam pemahaman terhadap perilaku struktural entitas aljabar ini.

Hasil dan Pembahasan

Gelanggang komutatif yang digunakan pada penelitian ini adalah gelanggang komutatif dengan unsur satuan. Selanjutnya akan diberikan definisi dari gelanggang $\mathcal{S}$-prima penuh.

Definisi 1. Misalkan R gelanggang komutatif dan $\mathcal{S}$ keluarga subhimpunan multiplikatif di R. Gelanggang R merupakan gelanggang $\mathcal{S}$-prima penuh apabila setiap ideal sejati P di R terdapat subhimpunan multiplikatif $S \in \mathcal{S}$ dan memenuhi $S \cap P = \emptyset$, sehingga ideal P merupakan ideal S-prima.

Contoh 1. Gelanggang $\mathbb{Z}_6$ merupakan gelanggang $\mathcal{S}$-prima penuh. Perhatikan bahwa, ideal dari $\mathbb{Z}_6$ adalah $P_1 = \{0\}, P_2 = \{0,3\}, P_3 = \{0,2,4\}$. Jelas bahwa P_2 dan P_3 merupakan ideal prima sehingga juga merupakan ideal S-prima. Ideal P_1 bukan ideal prima karena $2 \cdot 2 = 0$, tetapi $2 \notin P_1$. Namun untuk subhimpunan multiplikatif $S = \{4\}$, diperoleh bahwa untuk sebarang $a, b \in \mathbb{Z}_6$, $ab = 0$, diperoleh bahwa a atau b habis dibagi 3 sehingga $4a \in P_1$ atau $4b \in P_1$. Akibatnya, P_1 ideal S-prima. Jadi, $\mathbb{Z}_6$ merupakan gelanggang $\mathcal{S}$-prima penuh. Gelanggang $\mathbb{Z}_4$ bukan gelanggang $\mathcal{S}$-prima penuh karena ideal $\{0\}$ bukan ideal S-prima. Hal ini dikarenakan untuk kasus $2 \cdot 2 = 0$, tidak ada subhimpunan multiplikatif $S \cap \{0\} = \emptyset$ yang membuat $2s = 0$ untuk $s \in S$.

Definisi gelanggang $\mathcal{S}$-prima penuh di atas tidak menandakan bahwa subhimpunan multiplikatif yang dipilih tidak harus sama untuk membuat semua gelanggangnya menjadi ideal S-prima. Kecuali untuk gelanggang sederhana yang ideal sejatinya hanyalah $\{0\}$. Lema berikut memberikan bukti untuk pernyataan di atas.

Lema 1. Misalkan R gelanggang komutatif tidak sederhana. Jika R gelanggang $\mathcal{S}$-prima penuh maka tidak terdapat subhimpunan multiplikatif yang membuat semua ideal sejati di R merupakan ideal S-prima.

Bukti. Misalkan R gelanggang $\mathcal{S}$-prima penuh. Andaikan terdapat subhimpunan multiplikatif $S \in \mathcal{S}$ sedemikian sehingga setiap ideal P di R berlaku $S \cap P = \emptyset$, P ideal S-prima. Karena $S \neq \emptyset$ maka terdapat $x \in S$ sehingga $P_x = \{ax : a \in R\}$ merupakan ideal di R selain P. Karena R merupakan gelanggang $\mathcal{S}$-prima penuh, sehingga P_x merupakan ideal S-prima dan $S \cap P_x = \emptyset$. Kontradiksi karena $x \in S \cap P_x$. Jadi terbukti tidak terdapat subhimpunan multiplikatif $S \in \mathcal{S}$ yang membuat semua ideal di R merupakan ideal S-prima. Hal ini serupa dengan setiap ideal di R merupakan ideal S-prima dengan subhimpunan multiplikatifnya tidak semuanya sama. ■

Contoh 2. Pada Contoh 1, gelanggang $\mathbb{Z}_6$, P_1 adalah ideal S_1-prima dengan $S_1 = \{4\}$ kemudina P_2 dan P_3 adalah ideal S_2-prima dengan $S_2 = \{1\}$.

Selanjutnya dijelaskan karakteristik dari gelanggang $\mathcal{S}$-prima penuh dengan menggunakan teorema yang telah diberikan oleh Hamek dan Malek.

Teorema 1 (Hamek dan Malek, 2019). Misalkan R merupakan gelanggang komutatif, $S \subseteq R$ merupakan subhimpunan multiplikatif , dan P adalah ideal di R sedemikian sehingga $S \cap P = \emptyset$. Maka P merupakan S-prima jika dan hanya jika terdapat $s \in S$ sedemikian sehingga untuk setiap ideal I, J di R, jika $IJ \subseteq P$, maka $sI \subseteq P$ atau $sJ \subseteq P$.

Teorema 2. Misalkan R gelanggang komutatif. Jika R adalah gelanggang $\mathcal{S}$-prima penuh maka setiap idealnya idempoten.

Bukti. Ambil P ideal di R. Jelas bahwa P^2 juga merupakan ideal di R. Karena R merupakan gelanggang $\mathcal{S}$-prima penuh, maka terdapat $S \in \mathcal{S}$ subhimpunan multiplikatif di R dengan $S \cap P^2 = \emptyset$ sehingga P^2 ideal S-prima. Ambil $x \in P$, maka $x^2 \in P^2$. Karena P^2 ideal S-prima akibatnya terdapat $s \in S$ sehingga untuk setiap $x \in P$, $sx \in P^2$. Akibatnya, $P \subseteq sP^2$. Jelas bahwa $sP^2 \subseteq P^2$ dan $P^2 \subseteq P$. Maka, diperoleh $P^2 = P$. Jadi, terbukti bahwa setiap idealnya idempoten. ■

Teorema di atas sejalan dengan temuan Sharma & Prakash (2023) mengenai struktur ideal yang idempoten.

Contoh 3. Pada Contoh 1 , gelanggang $\mathbb{Z}_6$, $P_1 = \{0\}$, $P_2 = \{0,3\}$ dan $P_3 = \{0,2,4\}$ merupakan ideal yang bersifat idempoten.

Teorema 3. Misalkan R adalah gelanggang komutatif. Jika R merupakan gelanggang $\mathcal{S}$-prima penuh maka untuk setiap P_1 dan P_2 ideal di R terdapat $s \in S'$ dengan $S' \in \mathcal{S}$ adalah subhimpunan multiplikatif yang saling lepas dengan $P_1 \cap P_2$ sehingga $sP_1 \subseteq P_2$ atau $sP_2 \subseteq P_1$.

Bukti. Misalkan R adalah gelanggang $\mathcal{S}$-prima penuh. Ambil P_1 dan P_2 ideal di R. Jelas $P_1 \cap P_2$ merupakan ideal di R. Karena R gelanggang S-prima penuh maka terdapat $S' \subseteq R$ subhimpunan multiplikatif yang saling lepas dengan $P_1 \cap P_2$ sehingga $P_1 \cap P_2$ ideal S'-prima. Jelas, $P_1P_2 \subseteq P_1 \cap P_2$. Berdasarkan Teorema 1, terdapat $s \in S'$ sehingga $sP_1 \subseteq P_1 \cap P_2$ atau $sP_2 \subseteq P_1 \cap P_2$. Karena $P_1 \cap P_2 \subseteq P_1$ dan $P_1 \cap P_2 \subseteq P_2$, maka diperoleh $sP_1 \subseteq P_2$ atau $sP_2 \subseteq P_1$. ∎

Hasil berikutnya adalah mengidentifikasi gelanggang $\mathbb{Z}_n$ yang memenuhi gelanggang $\mathcal{S}$-prima penuh.

Lema 2. Gelanggang $\mathbb{Z}_n$ merupakan gelanggang $\mathcal{S}$-prima penuh jika $n = p_1.p_2 \dots .p_k$, dengan $k \geq 1$ dan $p_1, p_2, \dots, p_k$ merupakan bilangan prima.

Bukti. Misalkan $R = \mathbb{Z}_{p_1.p_2 \dots .p_k}$ dengan $k \geq 1$ dan $p_1, p_2, \dots, p_k$ merupakan bilangan prima. Perhatikan bahwa $P_a = aR$ dengan $a = x_1x_2 \dots x_l$ dan $x_1, \dots, x_l \in \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$, $l \geq 1$. Jelas bahwa P merupakan ideal sejati dari R. Selanjutnya akan dibuktikan ideal lain selain P_a adalah R. Misalkan J ideal selain P_a sehingga terdapat $t \in J$ sedemikian sehingga $FPB(a, t) = 1$. Berdasarkan teorema Euler, Hardy and Wright (2008), diperoleh $1 \in J$. Akibatnya $J = R$. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa P_a merupakan ideal S-prima. Perhatikan bahwa P_q dengan $q \in \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ merupakan ideal prima sehingga juga merupakan ideal S-prima. Selanjutnya, untuk $P_a = aR$ dengan $a = x_1x_2 \dots x_l$ dan $x_1, \dots, x_l \in \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$, $2 \leq l \leq k$. Pilih $S_a = \left\{\left(\frac{a}{x_d}\right)^n : n \in \mathbb{N}\right\}$, dengan $d \in \{1,2, \dots, l\}$. Pilih $s = \frac{a}{x_d}$. Ambil $u, v \in R$ yang memenuhi $uv \in P_a$. Akibatnya $x_d | u$ atau $x_d | v$. Sehingga diperoleh $su \in P_a$ atau $sv \in P_a$. Jadi terbukti P_a ideal S-prima. ∎

Hasil terakhir dibuktikan keterkaitan antara gelanggang prima penuh dengan gelanggang $\mathcal{S}$-prima penuh.

Lema 3. Misalkan R gelanggang komutatif. Jika R gelanggang prima penuh maka R merupakan gelanggang $\mathcal{S}$-prima penuh.

Bukti. Misalkan R gelanggang prima penuh. Ambil sebarang ideal sejati P di R dan $a \in R \backslash P$. Karena R gelanggang prima penuh sehingga P ideal prima. Akibatnya $a^2 \notin P$. Jadi, dapat dibentuk subhimpunan multiplikatif $S = \{a^n : n \in \mathbb{N}\}$ sehingga memenuhi $P \cap S = \emptyset$. Selanjutnya pilih $x \in S$ dan $a, b \in R$ yang memenuhi $xa \notin P$ dan $xb \notin P$. Karena P ideal prima maka $x^2ab \notin P$. Selanjutnya, andaikan $ab \in P$ sehingga $x^2ab \in P$. Hal ini kontradiksi, sehingga diperoleh $ab \notin P$. Akibatnya P merupakan ideal S-prima. Jadi, R merupakan gelanggang $\mathcal{S}$-prima penuh. ∎

Simpulan (12 pt, bolt)

Studi ini telah memperkenalkan dan mengkarakterisasi konsep gelanggang $\mathcal{S}$-prima penuh dengan menyajikan serangkaian lema dan teorema kunci yang mendefinisikan sifat strukturalnya. Kesimpulan utama dari penelitian ini adalah bahwa setiap gelanggang prima penuh pada dasarnya juga merupakan cincin yang sepenuhnya $\mathcal{S}$-prima. Kami telah menetapkan kriteria yang tepat untuk mengidentifikasi gelanggang $\mathcal{S}$-prima penuh dengan memperhatikan idealnya.

Penelitian di masa depan dapat memperluas temuan ini dengan mengeksplorasi pendekatan komputasional untuk mengidentifikasi gelanggang $\mathcal{S}$-prima penuh serta meneliti potensi aplikasinya dalam geometri aljabar dan teori bilangan. Saran untuk penelitian selanjutnya mencakup: Menyelidiki peran gelanggang $\mathcal{S}$-prima penuh dalam topologi aljabar; Menganalisis hubungan antara gelanggang $\mathcal{S}$-prima penuh dengan struktur aljabar lainnya seperti modul dan varian-varian aljabar.

Daftar Pustaka

Blair, R., & Tsutsui, Y. (1994). On fully prime rings. Journal of Algebra, 163(1), 45–54.

Chhiti, K., & Dabbek, S. (2021). On the generalizations of prime ideals in commutative rings. Journal of Algebra and Its Applications, 20(04), 2150060. https://doi.org/10.1142/S0219498821500603

Farzalipour, F., Ghaseminejad, R., & Sayedsadeghi, M. S. (2023). On almost S-prime submodules. Journal of Algebra and Related Topics, 11(1), 35–52.

Ghaseminejad, R., & Farzalipour, F. (2020). On generalized prime submodules and S-structures. Turkish Journal of Mathematics, 44(6), 2460–2474. https://doi.org/10.3906/mat-2003-86

Hamed, A., & Malek, A. (2019). S-prime ideals of a commutative ring. Beitrage zur Algebra und Geometrie, 60(4), 703–715. https://doi.org/10.1007/s13366-019-00476-5

Hardy, G. H., & Wright, E. M. (2008). An Introduction to the Theory of Numbers (6th ed.). Oxford University Press.

Nasr-Isfahani, M. A., & Tekir, Ü. (2021). On weakly prime ideals and their generalizations. Communications in Algebra, 49(3), 1141–1153. https://doi.org/10.1080/00927872.2020.1792996

Sevim, E. S., Arabaci, T., Tekir, Ü., & Koç, S. (2019). On S-prime submodules. Turkish Journal of Mathematics, 43(2), 1036–1046. https://doi.org/10.3906/mat-1807-97

Sharma, A., & Prakash, R. (2023). Characterization of idempotent ideals in commutative rings and applications. Bulletin of the Malaysian

Mathematical Society, 46(3), 1203–1216. https://doi.org/10.1007/s40840-022-01494-5

Tekir, Ü., & Arabaci, T. (2022). New approaches to almost S-prime and weakly S-prime ideals. Mathematics, 10(11), 1927. https://doi.org/10.3390/math10111927