

Pelabelan Komposit pada Graf Pohon

Hafif Komarullah

Tadris Matematika, Universitas Al-Falah As-Sunniah, Jember, Indonesia;

hafififa4@gmail.com

Abstrak. Pelabelan komposit merupakan fungsi bijektif dari himpunan simpul dan sisi pada graf ke himpunan bilangan bulat positif sedemikian sehingga setiap sisi yang bertetangga memiliki label yang tidak relatif prima. Graf yang memenuhi syarat tersebut disebut graf komposit. Penelitian ini bertujuan membuktikan bahwa beberapa kelas graf pohon merupakan graf komposit. Kelas graf yang dikaji meliputi graf sisir, graf pohon Y, graf sapu, graf ulat teratur, graf hasil identifikasi simpul dua graf bintang homogen, graf H bintang, dan graf ilalang. Penelitian ini menggunakan pendekatan deduktif aksiomatik, yaitu melalui penyusunan konstruksi fungsi pelabelan dan pembuktian formal berdasarkan definisi serta teorema yang berlaku dalam teori graf. Proses penelitian diawali dengan analisis struktur masing-masing graf untuk mengidentifikasi keteraturan matematis yang mendukung pembentukan fungsi pelabelan. Selanjutnya, dirumuskan dugaan (konjektur) yang kemudian dibuktikan secara deduktif sehingga diperoleh hasil yang sah. Hasil menunjukkan bahwa seluruh graf yang diteliti terbukti merupakan graf komposit. Penelitian ini memberikan kontribusi terhadap pengembangan pelabelan graf serta membuka peluang kajian lebih lanjut terhadap kelas graf lainnya.

Kata Kunci: Pelabelan Graf, Pelabelan Komposit, Graf Pohon

Abstract. Composite labeling is defined as a bijective function from the set of vertices and edges of a graph to the set of positive integers such that every pair of adjacent edges is assigned labels that are not relatively prime. A graph satisfying this condition is called a composite graph. This study aims to prove that several classes of tree graphs admit composite labeling. The graph classes considered include comb graphs, Y-tree graphs, broom graphs, regular caterpillar graphs, graphs obtained from vertex identification of two homogeneous star graphs, H-star graphs, and grass graphs. This research employs an axiomatic deductive approach, involving the construction of labeling functions and formal proofs based on established definitions and theorems in graph theory. The process begins with an analysis of the structure of each graph to identify mathematical regularities that support the construction of valid labeling functions. Based on this analysis, conjectures are formulated and subsequently proven using deductive reasoning to obtain valid results. The results show that all graph classes considered are composite graphs. This study contributes

to the development of graph labeling theory and provides opportunities for further research on other classes of graphs.

Keywords: Graph Labelling, Composite Labelling, Tree Graphs

Pendahuluan

Konsep dasar teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736 dalam upayanya menyelesaikan permasalahan terkenal, yaitu teka-teki Jembatan Königsberg. Dalam penerapannya, teori graf digunakan untuk memodelkan suatu permasalahan dengan merepresentasikan entitas sebagai simpul (*vertex*) dan hubungan antar entitas tersebut sebagai sisi (*edge*) (Surbakti, 2023). Secara formal, graf dinyatakan sebagai pasangan himpunan tak kosong $G(V, E)$, di mana V menyatakan himpunan simpul dan E merupakan himpunan sisi yang terdiri dari pasangan tak terurut simpul-simpul dalam V . Ukuran graf G merujuk pada banyaknya sisi yang dimiliki, sedangkan orde graf menyatakan jumlah simpul (Chartrand & Zhang, 2019). Seiring perkembangan kajian matematika diskrit, teori graf telah mengalami perluasan ke berbagai subbidang, salah satunya adalah pelabelan graf yang menjadi fokus dalam banyak penelitian terbaru.

Pelabelan graf didefinisikan sebagai suatu fungsi yang mengaitkan elemen-elemen dalam graf dengan bilangan bulat, mengikuti aturan atau ketentuan tertentu. Berdasarkan jenis elemen yang diberi label, pelabelan graf dapat dibedakan menjadi tiga kategori utama, yaitu pelabelan pada simpul, pelabelan pada sisi, dan pelabelan total (Wallis, 2001). Salah satu pelabelan simpul adalah pelabelan prima yang dikenalkan oleh Entringer pada tahun 1980 dan dipopulerkan oleh Tout dkk. (1982). Pelabelan prima merupakan fungsi bijektif yang memetakan simpul pada graf ke bilangan bulat positif sedemikian sehingga simpul yang bertetangga memiliki label relatif prima (Tout dkk., 1982). Dua bilangan bulat a dan b dikatakan relatif prima apabila $GCD(\text{Great Common Divisor})$ kedua bilangan adalah 1 (Burton, 2002). Pelabelan prima menginspirasi peneliti lain untuk mengembangkan konsep tersebut. Berliner dkk. (2016) mengembangkan pelabelan prima menjadi pelabelan koprima yang didefinisikan sebagai fungsi injektif $f: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ sedemikian sehingga simpul yang bertetangga memiliki label relatif prima. Jelas bahwa setiap graf berlaku pelabelan koprima, sehingga dalam konsep ini terfokus dalam mencari nilai minimum k atau disebut nilai minimum koprima. Peneliti lain juga mengembangkan pelabelan prima diantaranya pelabelan komposit (Maria & Vargese, 2017), pelabelan prima ganjil (Prajapati & Shah, 2018), pelabelan sisi relatif prima (Janani & Ramachandran, 2022),

Copyright © 2026

Buana Matematika:

Jurnal Ilmiah Matematika dan Pendidikan Matematika

p-ISSN : 2088-3021

e-ISSN : 2598-8077

pelabelan sisi koprima (Janani & Ramachandran, 2023), pelabelan total koprima (Komarullah, 2024a), dan lain-lain.

Misalkan diberikan sebarang graf G dengan order p dan ukuran q . Pelabelan komposit pada graf G merupakan fungsi bijektif $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, p + q\}$ sedemikian sehingga $\gcd(f(uv), f(vw)) \neq 1$ dengan $u, v, w \in V(G)$ (Maria & Vargese, 2017). Graf yang dapat dilabeli dengan pelabelan komposit disebut graf komposit. Peneliti sebelumnya telah melakukan kajian pada topik pelabelan komposit. Maria & Vargese (2017) menunjukkan bahwa graf lintasan, graf siklus, dan graf tangga adalah graf komposit. Manikandan & Sasikala (2022) meneliti tentang pelabelan komposit pada graf hasil operasi *unary* dari graf *comp* dan graf *splitting*. Sethujkarasi & Vidyanandini (2022) menunjukkan bahwa graf bintang, graf mahkota, graf *bistar* merupakan graf komposit. Hasil lain tentang pelabelan komposit dapat dilihat pada (Karuppuswamy & Kureethara, 2018; Komarullah, 2024b).

Berdasarkan penelitian (Maria & Vargese, 2017; Karuppuswamy & Kureethara, 2018; Manikandan & Sasikala, 2022; Sethujkarasi & Vidyanandini, 2022; Komarullah, 2024b), maka dalam artikel ini dibahas pelabelan komposit pada kelas graf yang berbeda, yaitu graf sisir Cb_n , graf pohon $Y P_n^3$, graf sapu $Br_{n,m}$, graf ulat teratur $C_{m,n}$, graf hasil identifikasi simpul dua graf bintang homogen $S_{1,n} \odot_{uv} S_{1,n}$, graf H bintang $H(S_n)$, dan graf ilalang $S_{n,m}$. Berikut disajikan beberapa definisi terkait operasi graf.

Definisi 1. (Wijaya & Baskoro, 2015, Operasi Identifikasi Simpul)

Identifikasi simpul dari graf G_1 dan G_2 pada simpul-simpul $u \in V(G_1)$ dan $v \in V(G_2)$ yang dilambangkan dengan $(G_1 \odot_{uv} G_2)$ menghasilkan graf G yang diperoleh dengan melekatkan simpul-simpul u dan v . Dengan demikian, graf G memiliki $(|V(G_1)| + |V(G_2)| - 1)$ simpul dan $(|E(G_1)| + |E(G_2)|)$ sisi.

Definisi 2. (Komarullah dkk., 2022, Operasi Amalgamasi simpul)

Amalgamasi dari m salinan G pada simpul tetap $v_0 \in V(G)$, dinotasikan dengan $Amal(G, v_0, m)$, adalah graf yang diperoleh dari m salinan G dengan cara mengidentifikasikan m salinan G pada simpul tetap v_0 .

Definisi 3. (Harary, 1994, Operasi korona)

Operasi korona dari graf G dan graf H dinotasikan dengan $G \odot H$. Graf hasil $G \odot H$ merupakan graf yang diperoleh dari $|V(G)|$ salinan dari graf H dengan setiap salinan dari graf H yaitu H_i dengan $i = 1, 2, 3, \dots, |V(G)|$ dihubungkan dengan setiap simpul ke- i dari G ke setiap simpul di H_i .

Metode

Penelitian ini merupakan penelitian dalam bidang matematika murni yang bertujuan untuk mengembangkan wawasan baru dalam kajian pelabelan graf. Fokus penelitian diarahkan pada pembentukan dan pembuktian sifat-sifat matematis melalui pendekatan teoretis. Metode yang digunakan adalah pendekatan deduktif aksiomatik, yaitu suatu metode yang bertumpu pada pembuktian logis berdasarkan aksioma, definisi, dan teorema yang telah mapan dalam logika matematika. Langkah-langkah pembuktian disusun secara sistematis untuk menghasilkan kesimpulan yang valid dan konsisten secara logis. Dalam prosesnya, peneliti melakukan analisis terhadap berbagai konstruksi graf dan hasil pelabelannya untuk mengidentifikasi keteraturan atau pola matematis yang muncul. Berdasarkan hasil analisis tersebut, dirumuskan dugaan (konjektur) yang selanjutnya dibuktikan secara deduktif sehingga menghasilkan teorema yang sah.

Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini dibahas tentang pelabelan pada beberapa kelas graf pohon yaitu graf sisir Cb_n , graf pohon $Y P_n^3$, graf sapu $Br_{n,m}$, graf ulat teratur $C_{m,n}$, graf hasil identifikasi simpul dua graf bintang homogen $S_{1,n} \odot_{u_n v_n} S_{1,n}$, graf H bintang $H(S_n)$, dan graf ilalang $S_{n,m}$. Hal tersebut dibahas secara rinci sebagai berikut.

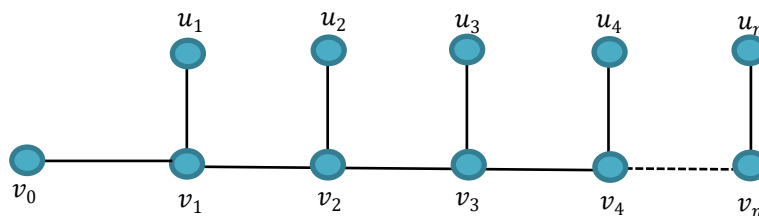
1. Graf sisir

Graf sisir memiliki order $2n + 1$ dan ukuran $2n$ dinotasikan dengan Cb_n merupakan graf yang diperoleh dari operasi korona graf lintasan P_n dan graf kosong \bar{K}_1 ($P_n \odot \bar{K}_1$) dan selanjutnya menempelkan salah satu simpul berderajat dua pada graf tersebut dengan salah satu simpul graf lintasan P_2 (Dhanalakshmi dan Parvathi, 2018). Penotasian simpul dan sisi pada graf sisir sebagai berikut.

$$V(Cb_n) = \{u_i | i = 1, 2, \dots, n\} \cup \{v_j | j = 0, 1, \dots, n\}.$$

$$E(Cb_n) = \{v_j v_{j+1} | j \in [0, n - 1]\} \cup \{u_i v_j | i = j; i, j \in [1, n]\}.$$

Ilustrasi penotasian simpul dan sisi pada graf sisir dapat dilihat pada Gambar 1.



Gambar 1. Penotasian Simpul dan Sisi pada Graf Sisir Cb_n

Teorema 1. Graf sisir Cb_n dengan $n \geq 2$ merupakan graf komposit.

Bukti. Untuk menunjukkan bahwa graf sisir Cb_n dengan $n \geq 2$ merupakan graf komposit yaitu dengan membangun fungsi pelabelan yang memenuhi kaidah

pelabelan komposit. Definisikan fungsi bijektif $f: V(Cb_n) \cup E(Cb_n) \rightarrow \{1, 2, \dots, 4n + 1\}$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned} f(v_j) &= \begin{cases} 1 & ; j = 0, \\ 4j - 1 & ; j = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \\ f(u_i) &= 4i + 1; i = 1, 2, \dots, n. \\ f(v_j v_{j+1}) &= 4j + 2; j = 0, 1, \dots, n - 1. \\ f(u_i v_j) &= 4i; i = j. \end{aligned}$$

Pertama, akan ditunjukkan bahwa f bersifat injektif. Perhatikan bahwa:

- Nilai $f(v_0) = 1$,
- Nilai $f(v_j) = 4j - 1$ untuk $j \geq 1$ menghasilkan bilangan $\{3, 7, 11, \dots, 4n - 1\}$,
- Nilai $f(u_i) = 4i + 1$ menghasilkan bilangan $\{5, 9, 13, \dots, 4n + 1\}$,
- Nilai $f(v_j v_{j+1}) = 4j + 2$ menghasilkan bilangan $\{2, 6, 10, \dots, 4n - 2\}$,
- Nilai $f(u_i v_j) = 4i$ menghasilkan bilangan $\{4, 8, 12, \dots, 4n\}$.

Setiap bentuk tersebut menghasilkan nilai yang berbeda dan tidak saling beririsan. Selain itu, dalam masing-masing definisi, nilai fungsi bergantung secara unik pada indeksnya, sehingga tidak terdapat dua elemen domain yang memiliki citra yang sama. Dengan demikian, f bersifat injektif.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa f bersifat surjektif. Himpunan hasil yang diperoleh dari seluruh definisi di atas adalah:

$$\{1\} \cup \{2, 6, 10, \dots, 4n - 2\} \cup \{3, 7, 11, \dots, 4n - 1\} \cup \{4, 8, 12, \dots, 4n\} \cup \{5, 9, 13, \dots, 4n + 1\}.$$

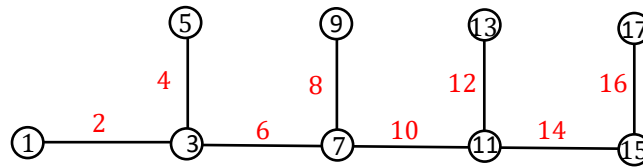
Gabungan himpunan tersebut tepat sama dengan $\{1, 2, 3, \dots, 4n + 1\}$. Oleh karena itu, setiap elemen pada kodomain memiliki prapeta di domain, sehingga f bersifat surjektif.

Karena f bersifat injektif dan surjektif, maka f merupakan fungsi bijektif. Selanjutnya, dibuktikan bahwa label setiap sisi bertetangga tidak relatif prima. Hal tersebut ditunjukkan sebagai berikut.

- Diketahui bahwa untuk setiap $j = 0, 1, \dots, n - 2$, nilai dari $f(v_j v_{j+1}) = 4j + 2$ dan $f(v_{j+1} v_{j+2}) = 4j + 6$. Karena kedua label tersebut genap, maka $\gcd(f(v_j v_{j+1}), f(v_{j+1} v_{j+2})) \neq 1$.
- Untuk $i = j$ dan $i, j = 1, 2, \dots, n$, nilai $f(u_i v_j) = 4i$ juga bernilai genap, sehingga $\gcd(f(u_i v_j), f(v_j v_{j+1})) \neq 1$ dan $\gcd(f(u_i v_j), f(v_{j-1} v_j)) \neq 1$.

Berdasarkan uraian di atas, dapat ditunjukkan bahwa fungsi f memenuhi kaidah pelabelan komposit, sehingga terbukti bahwa graf sisir Cb_n dengan $n \geq 2$ merupakan graf komposit. ■

Gambar 2 merupakan contoh pelabelan komposit pada graf sisir Cb_4 .



Gambar 2. Pelabelan Komposit pada Graf Sisir Cb_4

2. Graf pohon Y

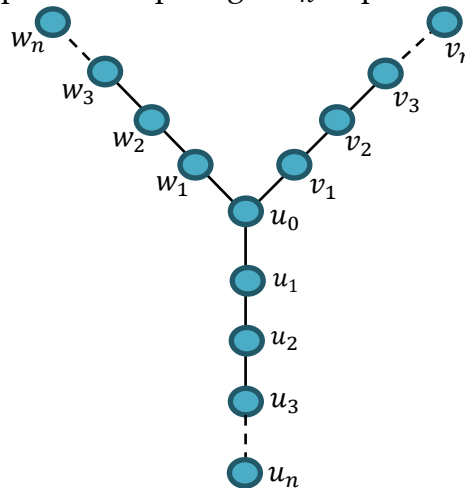
Graf pohon Y memiliki order $3n + 1$ dan ukuran $3n$ dinotasikan dengan P_n^3 merupakan graf yang isomorfis dengan $Amal(P_{n+1}, u_0, 3)$ dengan cara menduplikasi graf lintasan sebanyak 3 kali dan menempelkan salah satu simpul ujungnya dari masing-masing graf lintasan menjadi satu. Penotasian simpul dan sisi pada graf pohon Y sebagai berikut.

$$V(P_n^3) = \{u_i | i = 0, 1, \dots, n\} \cup \{v_j | j = 1, 2, \dots, n\} \cup \{w_k | k = 1, 2, \dots, n\}.$$

$$E(P_n^3) = \{u_i u_{i+1} | i = 0, 1, \dots, n - 1\} \cup \{u_0 v_1, v_j v_{j+1} | j = 1, 2, \dots, n - 1\}$$

$$\cup \{u_0 w_1, w_k w_{k+1} | k = 1, 2, \dots, n - 1\}.$$

Ilustrasi penotasian simpul dan sisi pada graf P_n^3 dapat dilihat pada Gambar 3.



Gambar 3. Penotasian Simpul dan Sisi pada Graf Pohon Y P_n^3

Teorema 2. Graf pohon Y P_n^3 dengan $n \geq 2$ merupakan graf komposit.

Bukti. Dengan cara yang sama, untuk menunjukkan bahwa graf pohon Y P_n^3 dengan $n \geq 2$ merupakan graf komposit yaitu dengan membangun fungsi pelabelan yang memenuhi kaidah pelabelan komposit pada graf tersebut. Definisikan fungsi bijektif $f: V(P_n^3) \cup E(P_n^3) \rightarrow \{1, 2, \dots, 6n + 1\}$ sebagai berikut.

$$f(u_i) = 2i + 1; i = 0, 1, \dots, n.$$

$$f(v_j) = 2(n + j) + 1; j = 1, 2, \dots, n.$$

$$f(w_k) = 4n + 2k + 1; k = 1, 2, \dots, n.$$

$$f(u_i u_{i+1}) = 2(i + 1); i = 0, 1, \dots, n - 1.$$

$$f(u_0 v_1) = 2n + 2.$$

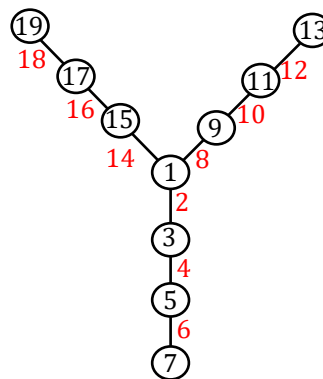
$$f(v_j v_{j+1}) = 2(n + j + 1); j = 1, 2, \dots, n.$$

$$f(u_0 w_1) = 4n + 2.$$

$$f(w_k w_{k+1}) = 4n + 2k + 2; k = 1, 2, \dots, n - 1.$$

Untuk menunjukkan bahwa fungsi f bersifat bijektif, terlebih dahulu diperiksa sifat injektifnya. Berdasarkan definisi fungsi, terlihat bahwa seluruh titik dipetakan ke bilangan ganjil, sedangkan seluruh sisi dipetakan ke bilangan genap. Pemisahan ini secara langsung menjamin bahwa tidak terdapat kemungkinan dua elemen berbeda dari domain, baik antara titik dengan sisi maupun sesamanya, yang memiliki citra yang sama. Selain itu, setiap aturan pemetaan bergantung pada parameter indeks yang berbeda dan meningkat secara teratur, sehingga tidak ada dua elemen berbeda yang menghasilkan nilai yang identik. Dengan demikian, fungsi f bersifat injektif. Selanjutnya, untuk membuktikan sifat surjektif, diperhatikan bahwa hasil pemetaan titik menghasilkan seluruh bilangan ganjil mulai dari 1 hingga $6n + 1$, sedangkan hasil pemetaan sisi menghasilkan seluruh bilangan genap dari 2 hingga $6n$. Gabungan kedua himpunan tersebut membentuk himpunan $\{1, 2, 3, \dots, 6n + 1\}$, yang identik dengan kodomain fungsi yang telah ditentukan. Hal ini menunjukkan bahwa setiap elemen dalam kodomain memiliki praimaj di domain, sehingga fungsi f bersifat surjektif. Diketahui bahwa label setiap sisi adalah bilangan genap, sehingga jelas bahwa faktor persekutuan terbesar dari label tersebut minimal 2. Terbukti bahwa graf pohon $Y P_n^3$ dengan $n \geq 2$ merupakan graf komposit. ■

Gambar 4 merupakan contoh pelabelan kompositi pada graf pohon $Y P_3^3$.



Gambar 4. Pelabelan Komposit pada Graf Pohon $Y P_3^3$

3. Graf sapu

Graf sapu memiliki order $m + n + 1$ dan ukuran $m + n$ dinotasikan dengan $Br_{n,m}$ merupakan graf yang isomorfis dengan $P_{n+1} \odot_{v_0 u_0} S_{1,n}$ yang dibangun dengan mengidentifikasi simpul pusat (simpul berderajat n) graf bintang $S_{1,n}$ dengan salah satu ujung dari graf lintasan P_{n+1} . Penotasian simpul dan sisi pada graf sapu $Br_{n,m}$ sebagai berikut.

$$V(Br_{n,m}) = \{u_i | i \in [1, n]\} \cup \{v_j | j \in [0, m]\}$$

$$E(Br_{n,m}) = \{u_i u_{i+1} | i \in [1, n - 1]\} \cup \{v_0 u_1, v_0 v_j | j \in [1, m]\}.$$

Copyright © 2026

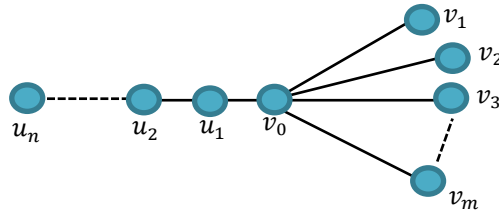
Buana Matematika:

Jurnal Ilmiah Matematika dan Pendidikan Matematika

p-ISSN : 2088-3021

e-ISSN : 2598-8077

Gambar 5 merupakan contoh ilustrasi penotasian simpul dan sisi pada graf sapu $Br_{n,m}$.



Gambar 5. Penotasian Simpul dan Sisi pada Graf Sapu $Br_{n,m}$

Teorema 3. Graf sapu $Br_{n,m}$ dengan $n \geq 1$ dan $m \geq 2$ merupakan graf komposit.

Bukti. Untuk membuktikan bahwa graf sapu $Br_{n,m}$ dengan $n \geq 1$ dan $m \geq 2$ merupakan graf komposit yaitu dengan menunjukkan bahwa terdapat fungsi bijektif yang memetakan simpul dan sisi graf ke bilangan bulat positif dengan syarat setiap sisi yang bersisian dengan simpul yang sama memiliki label yang tidak relatif prima. Definisikan fungsi bijektif $f: V(Br_{n,m}) \cup E(Br_{n,m}) \rightarrow \{1, 2, \dots, 2(m+n) + 1\}$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned} f(v_j) &= 2j + 1; j = 0, 1, \dots, m. \\ f(u_i) &= 2(m+i) + 1; i = 1, 2, \dots, n. \\ f(v_0v_j) &= 2j; j = 1, 2, \dots, m. \\ f(v_0u_1) &= 2m + 2. \\ f(u_iu_{i+1}) &= 2(m+i) + 2; i = 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned}$$

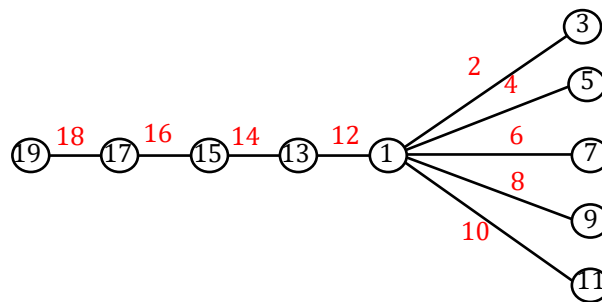
Akan ditunjukkan bahwa fungsi f merupakan fungsi bijektif dengan kodomain $\{1, 2, \dots, 2(m+n) + 1\}$. Pertama, dibuktikan bahwa fungsi f bersifat injektif. Berdasarkan definisi fungsi, untuk setiap titik v_j diperoleh nilai $f(v_j) = 2j + 1$, yang menghasilkan bilangan ganjil berurutan mulai dari 1 hingga $2m + 1$. Selanjutnya, untuk setiap titik u_i , nilai $f(u_i) = 2(m+i) + 1$ menghasilkan bilangan ganjil lanjutan dari $2m + 3$ hingga $2(m+n) + 1$. Dengan demikian, seluruh titik dipetakan ke bilangan ganjil yang berbeda satu sama lain. Di sisi lain, untuk setiap sisi graf, diperoleh bahwa $f(v_0v_j) = 2j$ menghasilkan bilangan genap dari 2 hingga $2m$, kemudian $f(v_0u_1) = 2m + 2$, serta $f(u_iu_{i+1}) = 2(m+i) + 2$ menghasilkan bilangan genap dari $2m + 4$ hingga $2(m+n)$. Hal ini menunjukkan bahwa seluruh sisi dipetakan ke bilangan genap yang juga saling berbeda. Karena hasil pemetaan titik adalah bilangan ganjil dan hasil pemetaan sisi adalah bilangan genap, maka tidak mungkin terdapat dua elemen berbeda yang memiliki citra yang sama. Dengan demikian, fungsi f bersifat injektif.

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa fungsi f bersifat surjektif. Kodomain fungsi adalah himpunan bilangan bulat $\{1, 2, \dots, 2(m+n) + 1\}$, yang terdiri dari bilangan ganjil dan genap secara lengkap. Dari konstruksi fungsi, seluruh bilangan ganjil dalam

kodomain dihasilkan oleh pemetaan titik, sedangkan seluruh bilangan genap dihasilkan oleh pemetaan sisi. Selain itu, banyaknya elemen pada domain, yaitu jumlah titik dan sisi, adalah $(m + n + 1) + (m + n) = 2(m + n) + 1$, yang sama dengan banyaknya elemen pada kodomain. Oleh karena itu, setiap elemen dalam kodomain memiliki prapeta di domain, sehingga fungsi f bersifat surjektif.

Karena fungsi f terbukti bersifat injektif dan surjektif, maka dapat disimpulkan bahwa fungsi tersebut adalah fungsi bijektif. Diketahui bahwa label setiap sisi pada graf sapu $Br_{n,m}$ bernilai genap, sehingga dipastikan setiap dua label sisi yang bertetangga pada graf sapu $Br_{n,m}$ tidak saling relatif prima. Terbukti bahwa graf sapu $Br_{n,m}$ dengan $n \geq 1$ dan $m \geq 2$ merupakan graf komposit. ■

Gambar 6 merupakan contoh pelabelan komposit pada graf sapu $Br_{4,5}$.



Gambar 6. Pelabelan Komposit pada Graf Sapu $Br_{4,5}$

4. Graf ulat teratur

Graf ulat teratur memiliki order $m + mn$ dan ukuran $m - 1 + mn$ dinotasikan dengan $C_{m,n}$ merupakan graf yang dibangun dari operasi korona graf lintasan P_m dan graf kosong \bar{K}_n dengan menduplikasi graf kosong \bar{K}_n sebanyak m kali dan menghubungkan masing-masing graf kosong \bar{K}_n ke setiap simpul graf lintasan P_m . Berikut adalah penotasian simpul dan sisi pada graf ulat teratur.

$$V(C_{m,n}) = \{u_i | i \in [1, m]\} \cup \{v_j^i | i \in [1, m]; j \in [1, n]\}.$$

$$E(C_{m,n}) = \{u_i u_{i+1} | i \in [1, m - 1]\} \cup \{u_i v_j^i | i \in [1, m]; j \in [1, n]\}.$$

Teorema 4. Graf ulat teratur $C_{m,n}$ dengan $m \geq 2$ dan $n \geq 2$ merupakan graf komposit.

Bukti. Dengan cara yang sama, untuk menunjukkan bahwa graf ulat teratur $C_{m,n}$ dengan $m \geq 2$ dan $n \geq 2$ merupakan graf komposit yaitu dengan membangun fungsi pelabelan yang memenuhi kaidah pelabelan komposit pada graf tersebut. Definisikan fungsi bijektif $f: V(C_{m,n}) \cup E(C_{m,n}) \rightarrow \{1, 2, \dots, 2(m + mn) - 1\}$ sebagai berikut.

$$f(u_i) = 2n(i - 1) + 2i - 1; i = 1, 2, \dots, m.$$

$$f(v_j^i) = 2n(i - 1) + 2(i + j) - 1; j = 1, 2, \dots, n; i = 1, 2, \dots, m.$$

$$f(u_i u_{i+1}) = 2n(i - 1) + 2(i + n); i = 1, 2, \dots, m - 1.$$

$$f(u_i v_j^i) = 2n(i - 1) + 2(i + j) - 2; j = 1, 2, \dots, n; i = 1, 2, \dots, m.$$

Copyright © 2026

Buana Matematika:

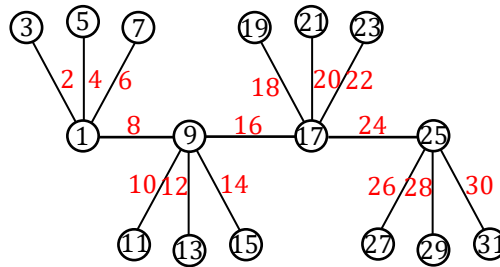
Jurnal Ilmiah Matematika dan Pendidikan Matematika

p-ISSN : 2088-3021

e-ISSN : 2598-8077

Akan ditunjukkan bahwa f bijektif dengan kodomain $\{1, 2, \dots, 2(m + mn) - 1\}$. Citra titik berupa bilangan ganjil, sedangkan citra sisi berupa bilangan genap, sehingga tidak terjadi duplikasi nilai. Dengan demikian, f bersifat injektif. Selanjutnya, banyaknya elemen domain adalah $(m + mn) + (m - 1 + mn) = 2(m + mn) - 1$, sama dengan kardinalitas kodomain. Karena seluruh bilangan ganjil dan genap dalam kodomain tercakup oleh pemetaan, maka f bersifat surjektif. Dengan demikian, diperoleh bahwa f merupakan fungsi bijektif. Selanjutnya, dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa setiap sisi memiliki label genap, artinya setiap sisi yang bertetangga memiliki label yang tidak relatif prima, sehingga fungsi f memenuhi pelabelan komposit. Terbukti bahwa graf ulat teratur $C_{m,n}$ dengan $m \geq 2$ dan $n \geq 2$ merupakan graf komposit. ■

Gambar 7 merupakan contoh pelabelan komposit pada graf ulat teratur $C_{4,3}$.



Gambar 7. Pelabelan Komposit pada Graf Ulat Teratur $C_{4,3}$

5. Graf hasil identifikasi simpul dua graf bintang homogen

Graf hasil identifikasi simpul dua graf bintang homogen diperoleh dengan menempelkan salah satu simpul anting (simpul berderajat satu) dari masing-masing graf bintang sehingga menghasilkan graf $(S_{1,n} \odot_{u_n v_n} S_{1,n})$. Penotasian simpul dan sisi pada graf hasil identifikasi simpul dua graf bintang homogen $(S_{1,n} \odot_{u_n v_n} S_{1,n})$ sebagai berikut.

$$V(S_{1,n} \odot_{u_n v_n} S_{1,n}) = \{v_i | i \in [0, n - 1]\} \cup \{w\} \cup \{u_i | i \in [0, n - 1]\}.$$

$$E(S_{1,n} \odot_{u_n v_n} S_{1,n}) = \{v_0 w, v_0 v_i | i \in [0, n - 1]\} \cup \{u_0 w, u_0 u_i | i \in [0, n - 1]\}.$$

Teorema 5. Graf $S_{1,n} \odot_{u_n v_n} S_{1,n}$ dengan $n \geq 2$ merupakan graf komposit.

Bukti. Untuk membuktikan bahwa graf $S_{1,n} \odot_{u_n v_n} S_{1,n}$ dengan $n \geq 2$ merupakan graf komposit yaitu dengan menunjukkan bahwa terdapat fungsi bijektif yang memetakan simpul dan sisi graf ke bilangan bulat positif dengan syarat setiap sisi yang bersisian dengan simpul yang sama memiliki label yang tidak relatif prima. Definiskan fungsi bijektif $f: V(S_{1,n} \odot_{u_n v_n} S_{1,n}) \cup E(S_{1,n} \odot_{u_n v_n} S_{1,n}) \rightarrow \{1, 2, \dots, 4n + 1\}$ sebagai berikut.

$$f(v_i) = 2i + 1; i = 0, 1, \dots, n - 1.$$

$$f(w) = 2n + 1.$$

$$f(u_i) = 2(n + i) + 3; i = 1, 2, \dots, n - 1.$$

$$f(v_0v_i) = 2i; i = 1, 2, \dots, n - 1.$$

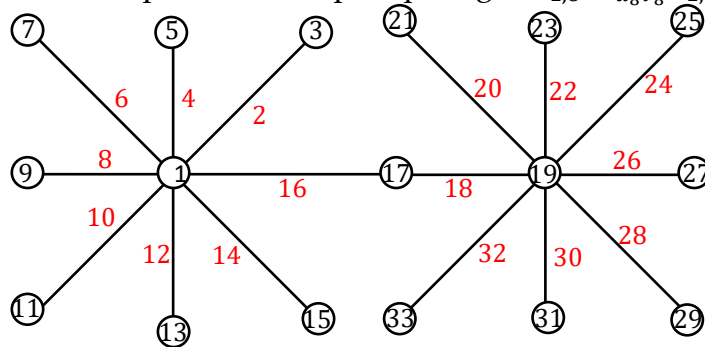
$$f(v_0w) = 2n.$$

$$f(wu_0) = 2n + 2.$$

$$f(u_iv_0) = 2(n + i) + 2; i = 1, 2, \dots, n - 1.$$

Akan ditunjukkan bahwa f merupakan fungsi bijektif dengan kodomain $\{1, 2, \dots, 4n + 1\}$. Citra titik v_i, w , dan u_i seluruhnya berupa bilangan ganjil, yaitu membentuk deret dari 1 hingga $4n + 1$ tanpa pengulangan. Sementara itu, citra sisi v_0v_i, v_0w, wu_0 , dan u_iv_0 merupakan bilangan genap yang membentuk deret dari 2 hingga $4n$ secara berurutan. Karena bilangan ganjil dan genap saling terpisah, maka tidak terdapat dua elemen domain yang memiliki citra sama, sehingga f bersifat injektif. Selanjutnya, banyaknya elemen domain adalah $(n + 1 + (n - 1)) + ((n - 1) + 1 + 1 + (n - 1)) = 4n + 1$, yang sama dengan kardinalitas kodomain. Karena seluruh bilangan ganjil dan genap dalam kodomain tercakup oleh pemetaan, maka f bersifat surjektif. Dengan demikian, diperoleh bahwa fungsi f bijektif. Selanjutnya, dapat diidentifikasi bahwa setiap sisi yang bertetangga memiliki label yang tidak relatif prima, sehingga fungsi f memenuhi pelabelan komposit. Terbukti bahwa graf $S_{1,n} \odot_{u_nv_n} S_{1,n}$ dengan $n \geq 2$ merupakan graf komposit. ■

Gambar 8 merupakan contoh pelabelan komposit pada graf $S_{1,8} \odot_{u_8v_8} S_{1,8}$.



Gambar 8. Pelabelan komposit pada graf $S_{1,8} \odot_{u_8v_8} S_{1,8}$

6. Graf H bintang

Graf H bintang memiliki order $4n + 6$ dan ukuran $4n + 5$ dinotasikan dengan $H(S_n)$ merupakan graf yang dibangun dari menduplikasi graf $S_{1,n+1} \odot_{u_{n+1}v_{n+1}} S_{1,n+1}$ dan menghubungkan simpul berderajat dua pada masing-masing duplikasi graf $S_{1,n+1} \odot_{u_{n+1}v_{n+1}} S_{1,n+1}$ dengan sebuah garis. Simpul dan sisi pada graf H bintang dinotasikan sebagai berikut.

$$V(H(S_n)) = \{u\} \cup \{w\} \cup \{v_j^i | i \in [1, 4]; j \in [0, n]\}.$$

$$E(H(S_n)) = \{u, w\} \cup \{uv_0^1, uv_0^3\} \cup \{wv_0^2, wv_0^4\} \cup \{v_0^i v_j^i | i \in [1, 4]; j \in [0, n]\}.$$

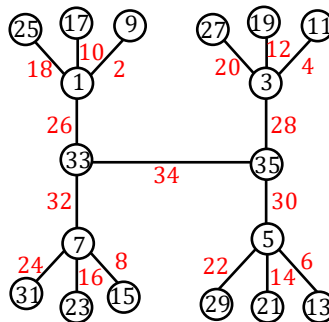
Teorema 6. Graf H bintang $H(S_n)$ dengan $n \geq 2$ merupakan graf komposit.

Bukti. Dengan cara yang sama, untuk menunjukkan bahwa graf H bintang $H(S_n)$ dengan $n \geq 2$ merupakan graf komposit yaitu dengan membangun fungsi pelabelan yang memenuhi kaidah pelabelan komposit pada graf tersebut. Definisikan fungsi bijektif $f: V(H(S_n)) \cup E(H(S_n)) \rightarrow \{1, 2, \dots, 8n + 11\}$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 f(v_j^i) &= 8j + 2i - 1; i = 1, 2, \dots, 4; j = 0, 1, \dots, n. \\
 f(u) &= 8n + 9. \\
 f(w) &= 8n + 11. \\
 f(v_0^i v_j^i) &= 8j + 2i - 8; i = 1, 2, \dots, 4; j = 1, 2, \dots, n. \\
 f(uv_0^i) &= \begin{cases} 8n + 2; & i = 1, \\ 8n + 8; & i = 4. \end{cases} \\
 f(wv_0^i) &= \begin{cases} 8n + 4; & i = 2, \\ 8n + 6; & i = 3. \end{cases} \\
 f(uw) &= 8n + 10.
 \end{aligned}$$

Nilai pada titik diperoleh dalam bentuk bilangan ganjil melalui ekspresi $8j + 2i - 1$, serta tambahan $8n + 9$ dan $8n + 11$. Di sisi lain, seluruh sisi dipetakan ke bilangan genap melalui rumus $8j + 2i - 8$ dan konstanta terkait. Pemisahan ini menjamin tidak adanya kesamaan nilai antara titik dan sisi. Selanjutnya, variasi indeks i dan j menghasilkan deret ganjil dan genap yang tersusun sistematis tanpa pengulangan. Hal ini memastikan setiap elemen domain memiliki citra yang berbeda, sehingga fungsi bersifat injektif. Selain itu, seluruh bilangan dari 1 hingga $8n + 11$ dapat diperoleh, di mana bilangan ganjil berasal dari titik dan bilangan genap dari sisi. Dengan demikian, setiap elemen kodomain memiliki prapeta, sehingga fungsi bersifat surjektif. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa f bersifat bijektif. Karena label setiap sisi bernilai genap, maka setiap sisi yang bertetangga memiliki label yang tidak relatif prima, sehingga fungsi f memenuhi pelabelan komposit. Terbukti bahwa graf H bintang $H(S_n)$ dengan $n \geq 2$ merupakan graf komposit. ■

Gambar 9 merupakan contoh pelabelan komposit pada graf H bintang $H(S_3)$.



Gambar 9. Pelabelan Komposit pada Graf H Bintang $H(S_3)$

7. Graf ilalang

Copyright © 2026

Graf ilalang $S_{n,m}$ adalah sebuah graf yang dibangun dari operasi penggabungan m salinan graf bintang yang diidentifikasi pada simpul yang berderajat satu. Penotasian simpul dan sisi pada graf ilalang $S_{n,m}$ adalah sebagai berikut.

$$V(S_{n,m}) = \{u_0\} \cup \{v_i^j | i \in [0, m]; j \in [1, n]\}$$

$$E(S_{n,m}) = \{u_0 v_0^j | j \in [1, n]\} \cup \{v_0^j v_i^k | k = j; j \in [1, n]; i \in [1, m]\}.$$

Teorema 7. Graf ilalang $S_{n,m}$ dengan $n \geq 2$ dan $m \geq 2$ merupakan graf komposit.

Bukti. Dengan cara yang sama, untuk menunjukkan bahwa graf ilalang $S_{n,m}$ dengan $n \geq 2$ dan $m \geq 2$ merupakan graf komposit. yaitu dengan membangun fungsi pelabelan yang memenuhi kaidah pelabelan komposit pada graf tersebut. Definisikan fungsi bijektif $f: V(S_{n,m}) \cup E(S_{n,m}) \rightarrow \{1, 2, \dots, 2(mn + n) + 1\}$ sebagai berikut.

$$f(u_0) = 1.$$

$$f(v_i^j) = 2(i + mj + j - m) + 1; i = 0, 1, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n.$$

$$f(v_0^j v_i^j) = 2(i + mj + j - m); i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n.$$

$$f(v_0^j u) = 2(mj + j - m); j = 1, 2, \dots, n.$$

Nilai fungsi pada titik u_0 dan v_i^j menghasilkan bilangan ganjil, sedangkan nilai pada sisi $v_0^j v_i^j$ dan $v_0^j u$ berupa bilangan genap. Pemisahan ini memastikan bahwa tidak terjadi kesamaan nilai antara citra titik dan sisi. Selanjutnya, variasi indeks i dan j membentuk barisan bilangan ganjil dan genap yang tersusun berurutan tanpa pengulangan. Dengan demikian, setiap elemen domain dipetakan ke nilai yang berbeda, sehingga fungsi bersifat injektif. Di sisi lain, seluruh bilangan dalam kodomain dapat dicapai, di mana bilangan ganjil dihasilkan oleh titik dan bilangan genap oleh sisi. Banyaknya elemen domain juga sama dengan kardinalitas kodomain, yaitu $2(mn + n) + 1$, sehingga setiap elemen kodomain memiliki prapeta. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa f bersifat bijektif. Selanjutnya, dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa setiap sisi yang bertetangga memiliki label yang tidak relatif prima, sehingga fungsi f memenuhi pelabelan komposit. Terbukti bahwa ilalang $S_{n,m}$ dengan $n \geq 2$ dan $m \geq 2$ merupakan graf komposit. ■

Simpulan

Penelitian ini menghasilkan pembuktian bahwa sejumlah graf pohon tertentu tergolong sebagai graf komposit. Pembuktian dilakukan melalui metode deduktif aksiomatik dan pendeteksian pola yang menghasilkan fungsi bijektif dengan syarat setiap sisi yang bersisian dengan simpul yang sama memiliki label yang tidak relatif prima. Graf sisir, graf pohon Y, graf sapu, graf ulat teratur, graf hasil identifikasi simpul dua graf bintang homogen, graf H bintang, dan graf ilalang terbukti memenuhi pelabelan komposit. Temuan ini memperluas karakterisasi graf komposit dalam ranah pelabelan graf.

Prospek pengembangan dapat diarahkan pada graf hasil operasi lain atau graf non-pohon untuk mengetahui keberlakuan pelabelan komposit secara lebih

Copyright © 2026

Buana Matematika:

Jurnal Ilmiah Matematika dan Pendidikan Matematika

p-ISSN : 2088-3021

e-ISSN : 2598-8077

luas. Konsep ini juga berpotensi diterapkan dalam pengkodean, jaringan komputer, dan kriptografi yang memerlukan struktur keterhubungan yang khas.

Daftar Pustaka

- Berliner, A. H., Hook, J., Mbirika, A., Dean, N., Marr, A., & McBee, C. D. (2016). Coprime and Prime Labelings of Graphs. *Journal of Integer Sequences*, 19(2), 3. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1604.07698>
- Burton, D. M. (2002). *Elementary Number Theory Fifth Edition*. New York: McGraw-Hill.
- Chartrand, G. & P. Zhang. (2019). *Chromatic Graph Theory*. Florida: CRC press.
- Dhanalakshmi, S., & Parvathi, N. (2018, April). Mean square cordial labelling related to some acyclic graphs and its rough approximations. In *Journal of physics: Conference series* (Vol. 1000, No. 1, p. 012040). IOP Publishing. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1000/1/012040>
- Harary, F. 1994. *Graph Theory*. Michigan: Addison-Wesley Publishing Company. Boston
- Janani, R. dan T. Ramachandran. 2023. Coprime Edge Labeling of Graphs. SSRN. 1-11. <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.4486269>
- Janani, R., & Ramachandran, T. (2022). On Relatively Prime Edge Labeling of Graphs. *Engineering Letters*, 30(2), 659-665.
- Karuppuswamy, P., & Kureethara, J. V. (2018). Composite labelling of graphs-II. *World Scientific News*, (99), 227-234.
- Komarullah, H. (2024a, March). Pelabelan Total Koprime. In *Prosiding Seminar Pendidikan Matematika dan Matematika* (Vol. 9). <https://doi.org/10.21831/pspmm.v9i1.329>
- Komarullah, H. (2024b, March). P Pelabelan Komposit Pada Graf Memuat Cycle. In *Prosiding Seminar Pendidikan Matematika dan Matematika* (Vol. 9). <https://doi.org/10.21831/pspmm.v9i1.326>
- Komarullah, H., & Wijaya, K. (2022, February). A Minimum Coprime Number for Amalgamation of Wheel. In *International Conference on Mathematics, Geometry, Statistics, and Computation (IC-MaGeStiC 2021)* (pp. 53-57). Atlantis Press. <https://doi.org/10.2991/acsr.k.220202.012>
- Manikandan, T. R., & Sasikala, V. E. (2022). Composite Labelling of Unary Operation of Comp Graph and 2-Tuple of Coconut Tree. *Journal of Algebraic Statistics*, 13(3), 899-906. <https://www.publishoa.com/index.php/journal/article/view/704/594>

- Maria, P. S., & Varghese, K. J. (2017). Composite Labelling of Graphs. *International Journal of Applied Graph Theory*, 1(1), 34-41. <https://www.ijagt.com/upload/Composite Labelling of Graphs.pdf>
- Prajapati, U., & Shah, K. P. (2018). On odd prime labeling. *International journal of Research and Analytical Reviews*, 5(4), 284-294. https://ijrar.com/upload_issue/ijrar_issue_20542373.pdf
- Sethujkkarasi, A., & Vidyanandini, S. (2022). Composite Labelling of Some Graphs and Application (No. 7434). EasyChair. <https://easychair.org/publications/preprint/7tX4>
- Surbakti, N. M. (2023). Implementasi Pewarnaan Graf Menggunakan Metode Algoritma Welch Powell pada Penjadwalan Seminar Proposal Skripsi di Program Studi Matematika Universitas Negeri Medan. *Buana Matematika: Jurnal Ilmiah Matematika dan Pendidikan Matematika*, 13(2), 137-148. <https://doi.org/10.36456/buanamatematika.v13i2.7261>
- Tout, R., Dabboucy, A. N., & Howalla, K. (1982). Prime labeling of graphs. *National Academy Science Letters-India*, 5(11), 365-368.
- Wallis, W. D. (2001). *Magic Graphs*. Birkhauser. Boston.
- Wijaya, K., & Baskoro, E. T. (2016). On Ramsey $(2K_2, 2H)(2K_2, 2H)$ -Minimal Graphs. In *Applied Analysis in Biological and Physical Sciences: ICMBA, Aligarh, India, June 2015* (pp. 219-225). Springer India.

Riwayat Hidup Penulis

Hafif Komarullah



Lahir di Jember, 12 Maret 1998. Staf pengajar di Program Studi Tadris Matematika Universitas Al-Falah As-Sunniah, Jember. Studi S1 Matematika, Universitas Jember, Jember, lulus tahun 2020 dan S2 Matematika, Universitas Jember, Jember, lulus tahun 2022. Penulis saat ini sedang menempuh studi S3 Matematika di Universitas Brawijaya, Malang. Informasi terkait beberapa publikasi lainnya dapat di lihat pada link : <https://scholar.google.com/citations?user=fxfxTqMAAAJ&hl=id>