document.docx

by Fatimahsugiono11@gmail.com 1

Submission date: 29-Jun-2025 05:05AM (UTC+0700)
Submission ID: 2627179855
File name: document.docx (396.22K)
Word count: 3007
Character count: 19888

Pelabelan Komposit pada Graf Pohon

Hafif Komarullah
Tadris Matematika, Universitas Al-Falah As-Sunniyah, Jember, Indonesia;
hafififa4@gmail.com
Info Artikel: Dikirim: --- ; Direvisi: ---; Diterima: --- [diisi oleh Editor Jurnal]

Abstrak. Pelabelan komposit merupakan fungsi bijektif dari himpunan simpul pada graf ke himpunan bilangan bulat positif sedemikian sehingga setiap sisi yang menghubungkan dua simpul memiliki label yang tidak relatif prima. Graf yang memenuhi syarat tersebut disebut graf komposit. Penelitian ini bertujuan membuktikan bahwa beberapa kelas graf pohon merupakan graf komposit. Kelas graf yang dikaji meliputi graf sisir, graf pohon Y, graf sapu, graf ulat teratur, graf hasil identifikasi simpul dua graf bintang homogen, graf H bintang, dan graf ilalang. Penelitian menggunakan pendekatan deduktif aksiomatik dan metode pendeteksian pola untuk menyusun fungsi pelabelan yang sahih. Hasil menunjukkan bahwa seluruh graf yang diteliti terbukti merupakan graf komposit. Penelitian ini memberikan kontribusi terhadap pengembangan pelabelan graf serta membuka peluang kajian lebih lanjut terhadap kelas graf lainnya.
Kata Kunci: Pelabelan Graf, Pelabelan Komposit, Graf Pohon

Abstract. Composite labelling is a bijective function from the set of vertices in a graph to the set of positive integers such that every edge connecting two vertices has a label that is not relatively prime. A graph that satisfies this condition is called a composite graph. This study aims to prove that certain classes of tree graphs are composite graphs. The classes of graphs examined include comb graphs, Y-tree graphs, broom graphs, regular caterpillar graphs, graphs resulting from the identification of two vertices of a homogeneous star graph, H-star graphs, and reed grass graphs. The research employs an axiomatic deductive approach and pattern detection methods to construct a valid labelling function. The results show that all the graphs studied are proven to be composite graphs. This research contributes to the development of graph labelling and opens up opportunities for further study of other graph classes.
Keywords: Graph Labelling, Composite Labelling, Tree Graphs

Pendahuluan

Konsep dasar teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736 dalam upayanya menyelesaikan permasalahan terkenal, yaitu teka-teki Jembatan Königsberg. Dalam penerapannya, teori graf digunakan untuk memodelkan suatu permasalahan dengan merepresentasikan entitas sebagai simpul (*vertex*) dan hubungan antar entitas tersebut sebagai sisi (*edge*) (Surbakti, 2023). Secara formal, graf dinyatakan sebagai pasangan himpunan tak kosong $G(V, E)$, di mana V menyatakan himpunan simpul dan E merupakan himpunan sisi yang terdiri dari pasangan tak terurut simpul-simpul dalam V. Ukuran graf G merujuk pada banyaknya sisi yang dimiliki, sedangkan orde graf menyatakan jumlah simpul (Chartrand & Zhang, 2019).

Seiring perkembangan kajian matematika diskrit, teori graf telah mengalami perluasan ke berbagai subbidang, salah satunya adalah pelabelan graf yang menjadi fokus dalam banyak penelitian terbaru.

Pelabelan graf didefinisikan sebagai suatu fungsi yang mengaitkan elemen-elemen dalam graf dengan bilangan bulat, mengikuti aturan atau ketentuan tertentu. Berdasarkan jenis elemen yang diberi label, pelabelan graf dapat dibedakan menjadi tiga kategori utama, yaitu pelabelan pada simpul, pelabelan pada sisi, dan pelabelan total (Wallis, 2001). Salah satu pelabelan simpul adalah pelabelan prima yang dikenalkan oleh Entringer pada tahun 1980 dan dipopulerkan oleh Tout dkk. (1982). Pelabelan prima merupakan fungsi bijektif yang memetakan simpul pada graf ke bilangan bulat positif sedemikian sehingga simpul yang bertetangga memiliki label relatif prima (Tout dkk., 1982). Dua bilangan bulat a dan b dikatakan relatif prima apabila GCD (*Great Common Divisor*) kedua bilangan adalah 1 (Burton, 2002). Pelabelan prima menginspirasi peneliti lain untuk mengembangkan konsep tersebut. Berliner dkk. (2016) mengembangkan pelabelan prima menjadi pelabelan koprima yang didefinisikan sebagai fungsi injektif $f: V(G) \rightarrow \{1,2, \dots, k\}$ sedemikian sehingga simpul yang bertetangga memiliki label relatif prima. Jelas bahwa setiap graf berlaku pelabelan koprima, sehingga dalam konsep ini terfokus dalam mencari nilai minimum k atau disebut nilai minimum koprima. Peneliti lain juga mengembangkan pelabelan prima diantaranya pelabelan komposit (Maria & Vargese, 2017), pelabelan prima ganjil (Prajapati & Shah, 2018), pelabelan sisi relatif prima (Janani & Ramachandran, 2022), pelabelan sisi koprima (Janani & Ramachandran, 2023), pelabelan total koprima (Komarullah, 2024a), dan lain-lain.

Misalkan diberikan sebarang graf G dengan order p dan ukuran q. Pelabelan komposit pada graf G merupakan fungsi bijektif $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, p + q\}$ sedemikian sehingga $gcd\big(f(uv), f(vw)\big) \neq 1$ dengan $u, v, w \in V(G)$ (Maria & Vargese, 2017). Graf yang dapat dilabeli dengan pelabelan komposit disebut graf komposit. Peneliti sebelumnya telah melakukan kajian pada topik pelabelan komposit. Maria & Vargese (2017) menunjukkan bahwa graf lintasan, graf siklus, dan graf tangga adalah graf komposit. Manikandan & Sasikala (2022) meneliti tentang pelabelan komposit pada graf hasil operasi *unary* dari graf *comp* dan graf *splitting*. Sethujkkarasi & Vidyanandini (2022) menunjukkan bahwa graf bintang, graf mahkota, graf *bistar* merupakan graf komposit. Hasil lain tentang pelabelan komposit dapat dilihat pada (Karuppuswamy & Kureethara, 2018; Komarullah, 2024b).

Berdasarkan penelitian sebelumnya, maka dalam paper ini akan dibahas pelabelan komposit pada beberapa kelas graf pohon diantaranya yaitu graf sisir Cb_n, graf pohon Y P_n^3, graf sapu $Br_{n,m}$, graf ulat teratur $C_{m,n}$, graf hasil identifikasi simpul dua graf bintang homogen $S_{1,n} \odot_{u_n v_n} S_{1,n}$, graf H bintang $H(S_n)$, dan graf ilalang $S_{n,m}$. Berikut disajikan beberapa definisi terkait operasi graf.

Definisi 1. (Wijaya & Baskoro, 2015, Operasi Identifikasi Simpul)
Identifikasi simpul dari graf G_1 dan G_2 pada simpul-simpul $u \in V(G_1)$ dan $v \in V(G_2)$ yang dilambangkan dengan $(G_1 \odot_{uv} G_2)$ menghasilkan graf G yang diperoleh dengan melekatkan simpul-simpul u dan v. Dengan demikian, graf G memiliki $(|V(G_1)| + |V(G_2)| - 1)$ simpul dan $(|E(G_1)| + |E(G_2)|)$ sisi.

Definisi 2. (Komarullah dkk., 2022, Operasi Amalgamasi simpul)
Amalgamasi dari m salinan G pada simpul tetap $v_0 \in V(G)$, dinotasikan dengan $Amal(G, v_0, m)$, adalah graf yang diperoleh dari m salinan G dengan cara mengidentifikasikan m salinan G pada simpul tetap v_0.

Definisi 3. (Harary, 1994, Operasi korona)
Operasi korona dari graf G dan graf H dinotasikan dengan $G \odot H$. Graf hasil $G \odot H$ merupakan graf yang diperoleh dari $|V(G)|$ salinan dari graf H dengan setiap salinan dari graf H yaitu H_i dengan $i = 1, 2, 3, \ldots, |V(G)|$ dihubungkan dengan setiap simpul ke-i dari G ke setiap simpul di H_i.

Metode

Penelitian ini merupakan penelitian eksploratif yang bertujuan untuk menemukan wawasan baru dalam kajian pelabelan graf. Penelitian jenis ini penting dalam matematika karena dapat menghasilkan pola-pola baru yang belum banyak dibahas sebelumnya. Metode yang digunakan adalah deduktif aksiomatik yang dikombinasikan dengan pendeteksian pola. Pendekatan deduktif aksiomatik bertumpu pada pembuktian logis berdasarkan aksioma, definisi, dan teorema yang telah diakui dalam logika matematika. Langkah-langkah pembuktian disusun secara sistematis untuk menghasilkan kesimpulan yang valid secara logis. Dalam pelaksanaannya, peneliti menggunakan pendeteksian pola dengan cara mengamati hasil pelabelan pada graf tertentu. Melalui observasi tersebut, diperoleh pola umum yang kemudian dirumuskan sebagai konjektur. Dugaan tersebut selanjutnya dibuktikan menggunakan pendekatan deduktif untuk menghasilkan teorema yang sahih.

Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini dibahas tentang pelabelan pada beberapa kelas graf pohon yaitu graf sisir Cb_n, graf pohon Y P_n^3, graf sapu $Br_{n,m}$, graf ulat teratur $C_{m,n}$, graf hasil identifikasi simpul dua graf bintang homogen $S_{1,n} \odot_{u_n v_n} S_{1,n}$, graf H bintang $H(S_n)$, dan graf ilalang $S_{n,m}$. Hal tersebut dibahas secara rinci sebagai berikut.

1. Graf sisir

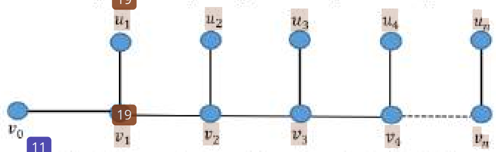
Graf sisir memiliki order $2n + 1$ dan ukuran $2n$ dinotasikan dengan Cb_n merukan graf yang diperoleh dari operasi korona graf lintasan P_n dan graf kosong $\overline{K}_1$ $(P_n \odot$

$\overline{K}_1$) dan selanjutnya menempelkan salah satu simpul berderajat dua pada graf tersebut dengan salah satu simpul graf lintasan P_2 (Dhanalakshmi dan Parvathi, 2018). Penotasian simpul dan sisi pada graf sisir sebagai berikut.

$V(Cb_n) = \{u_i; i = 1, 2, \dots, n\} \cup \{v_j; j = 0, 1, \dots, n\}$.

$E(Cb_n) = \{v_j v_{j+1}; j \in [0, n-1]\} \cup \{u_i v_j; i = j; i, j \in [1, n]\}$.

Ilustrasi penotasian simpul dan sisi pada graf sisir dapat dilihat pada Gambar 1.



Gambar 1. Penotasian Simpul dan Sisi pada Graf Sisir Cb_n

Teorema 1. Graf sisir Cb_n dengan $n \geq 2$ merupakan graf komposit.

Bukti. Untuk menunjukkan bahwa graf sisir Cb_n dengan $n \geq 2$ merupakan graf komposit yaitu dengan membangun fungsi pelabelan yang memenuhi kaidah pelabelan komposit. Definisikan fungsi bijektif $f: V(Cb_n) \cup E(Cb_n) \rightarrow \{1, 2, \dots, 4n + 1\}$ sebagai berikut.

$f(v_j) = \begin{cases} 1 & ; j = 0, \\ 4j - 1; & j = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$

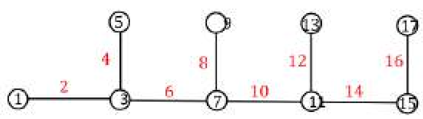
$f(u_i) = 4i + 1; i = 1, 2, \dots, n.$

$f(v_j v_{j+1}) = 4j + 2; j = 0, 1, \dots, n - 1.$

$f(u_i v_j) = 4i; i = j.$

Jelas bahwa label setiap sisi yang berisisian dengan simpul yang sama tidak relatif prima. Dapat ditunjukkan bahwa fungsi f memenuhi kaidah pelabelan komposit, sehingga terbukti bahwa graf sisir Cb_n dengan $n \geq 2$ merupakan graf komposit.■

Gambar 2 merupakan contoh pelabelan komposit pada graf sisir Cb_4.



Gambar 2. Pelabelan Komposit pada Graf Sisir Cb_4

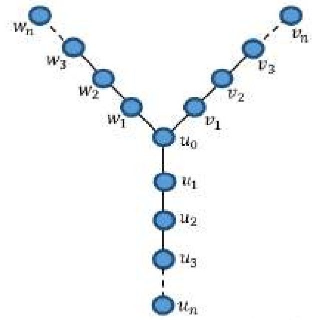
2. Graf pohon Y

Graf pohon Y memiliki order $3n + 1$ dan ukuran $3n$ dinotasikan dengan P_n^3 merupakan graf yang isomorfis dengan $Amal(P_{n+1}, u_0, 3)$ dengan cara menduplikasi graf lintasan sebanyak 3 kali dan menempelkan salah satu simpul ujungnya dari masing-masing graf lintasan menjadi satu. Penotasian simpul dan sisi pada graf pohon Y sebagai berikut.

$V(P_n^3) = \{u_i; i = 1, 2, \dots, n\} \cup \{v_j; j = 1, 2, \dots, n\} \cup \{w_k; k = 1, 2, \dots, n\}$.

$E(P_n^3) = \{u_i u_{i+1}; i = 0, 1, \dots, n - 1\} \cup \{u_0 v_1, v_j v_{j+1}; j = 1, 2, \dots, n - 1\}$
$\cup \{u_0 w_1, w_k w_{k+1}; k = 1, 2, \dots, n\}$.

Ilustrasi penotasian simpul dan sisi pada graf pohon $Y\ P_n^3$ dapat dilihat pada Gambar 3.



Gambar 3. Penotasian Simpul dan Sisi pada Graf Pohon $Y\ P_n^3$

Teorema 2. Graf pohon Y P_n^3 dengan $n \geq 2$ merupakan graf komposit.

Bukti. Dengan cara yang sama, untuk menunjukkan bahwa graf pohon Y P_n^3 dengan $n \geq 2$ merupakan graf komposit yaitu dengan membangun fungsi pelabelan yang memenuhi kaidah pelabelan komposit pada graf tesebut. Definisikan fungsi bijektif $f: V(P_n^3) \cup E(P_n^3) \to \{1, 2, \dots, 6n + 1\}$ sebagai berikut.

$f(u_i) = 2i + 1; i = 0, 1, \dots, n.$

$f(v_j) = 2(n + j) + 1; j = 1, 2, \dots, n.$

$f(w_k) = 4n + 2k + 1; k = 1, 2, \dots, n.$

$f(u_i u_{i+1}) = 2(i + 1); i = 0, 1, \dots, n - 1.$

$f(u_0 v_1) = 2n + 2.$

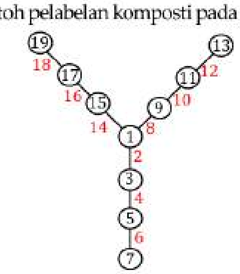
$f(v_j v_{j+1}) = 2(n + j + 1); j = 1, 2, \dots, n.$

$f(u_0 w_1) = 4n + 2.$

$f(w_k w_{k+1}) = 4n + 2k + 2; k = 1, 2, \dots, n - 1.$

Berdasarkan fungsi f diketahui bahwa setiap sisi yang berisisian dengan simpul yang sama memiliki label tidak relatif prima. Terbukti bahwa graf pohon Y P_n^3 dengan $n \geq 2$ merupakan graf komposit.■

Gambar 4 merupakan contoh pelabelan komposti pada graf pohon Y P_3^3.



Gambar 4. Pelabelan Komposit pada Graf Pohon Y P_3^3

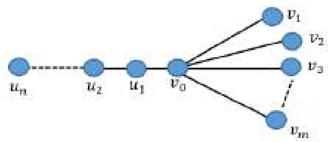
3. Graf sapu

Graf sapu memiliki order $m+n+1$ dan ukuran $m+n$ dinotasikan dengan $Br_{n,m}$ merupakan graf yang isomorfis dengan $P_{n+1} \odot_{v_0 u_0} S_{1,n}$ yang dibangun dengan mengidentifikasi simpul pusat (simpul berderajat n) graf bintang $S_{1,n}$ dengan salah satu ujung dari graf lintasan P_{n+1}. Penotasian simpul dan sisi pada graf sapu $Br_{n,m}$ sebagai berikut.

$V(Br_{n,m}) = \{u_i; i \in [1,n]\} \cup \{v_j; j \in [0,m]\}$

$E(Br_{n,m}) = \{u_i u_{i+1}; i \in [1,n-1]\} \cup \{v_0 u_1, v_0 v_j; j \in [1,m]\}$.

Gambar 5 merupakan contoh ilustrasi penotasian simpul dan sisi pada graf sapu $Br_{n,m}$.



Gambar 5. Penotasian Simpul dan Sisi pada Graf Sapu $Br_{n,m}$

Teorema 3. Graf sapu $Br_{n,m}$ dengan $n \geq 1$ dan $m \geq 2$ merupakan graf komposit.

Bukti. Untuk membuktikan bahwa graf sapu $Br_{n,m}$ dengan $n \geq 1$ dan $m \geq 2$ merupakan graf komposit yaitu dengan menunjukkan bahwa terdapat fungsi bijektif yang memetakan simpul dan sisi graf ke bilangan bulat positif dengan syarat setiap sisi yang bersisian dengan simpul yang sama memiliki label yang tidak relatif prima. Definisikan fungsi bijektif $f: V(Br_{n,m}) \cup E(Br_{n,m}) \rightarrow \{1,2,\dots,2(m+n)+1\}$ sebagai berikut.

$f(v_j) = 2j+1; j = 0,1,\dots,m.$

$f(u_i) = 2(m+i)+1; i = 1,2,\dots,n.$

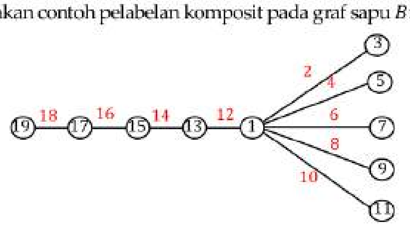
$f(v_0 v_j) = 2j; j = 1,2,\dots,m.$

$f(v_0 u_1) = 2m+2.$

$f(u_i u_{i+1}) = 2(m+i)+2; i = 1,2,\dots,n-1.$

Jelas bahwa setiap sisi yang bersisian dengan simpul yang sama memiliki label yang tidak relatif prima, sehingga fungsi f memenuhi pelabelan komposit. Terbukti bahwa graf sapu $Br_{n,m}$ dengan $n \geq 1$ dan $m \geq 2$ merupakan graf komposit.■

Gambar 6 merupakan contoh pelabelan komposit pada graf sapu $Br_{4,5}$.



Gambar 6. Pelabelan Komposit pada Graf Sapu $Br_{4,5}$

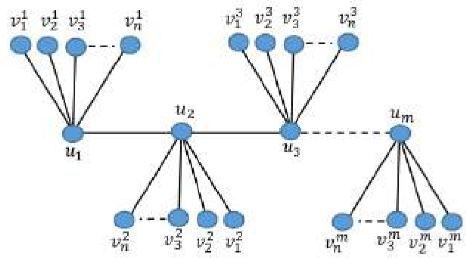
4. Graf ulat teratur

Graf ulat teratur memiliki order $m + mn$ dan ukuran $m - 1 + mn$ dinotasikan dengan $C_{m,n}$ merupakan graf yang dibangun dari operasi korona graf lintasan P_m dan graf kosong $\overline{K}_n$ dengan menduplikasi graf kosong $\overline{K}_n$ sebanyak m kali dan menghubungkan masing-masing graf kosong $\overline{K}_n$ ke setiap simpul graf lintasan P_m. Berikut adalah penotasian simpul dan sisi pada graf ulat teratur.

$V(C_{m,n}) = \{u_i; i \in [1, m]\} \cup \{v_j^i; i \in [1, m]; j \in [1, n]\}$

$E(C_{m,n}) = \{u_i u_{i+1}; i \in [1, m - 1]\} \cup \{u_i v_j^i; i \in [1, m]; j \in [1, n]\}$.

Ilustrasi penotasian simpul dan sisi pada graf ulat teratur dapat dilihat pada Gambar 7.



Gambar 7. Penotasian Simpul dan Sisi pada Graf Ulat Teratur $C_{m,n}$

Teorema 4. Graf ulat teratur $C_{m,n}$ dengan $m \geq 2$ dan $n \geq 2$ merupakan graf komposit.

Bukti. Dengan cara yang sama, untuk menunjukkan bahwa graf ulat teratur $C_{m,n}$ dengan $m \geq 2$ dan $n \geq 2$ merupakan graf komposit yaitu dengan membangun fungsi pelabelan yang memenuhi kaidah pelabelan komposit pada graf tesebut. Definisikan fungsi bijektif $f: V(C_{m,n}) \cup E(C_{m,n}) \rightarrow \{1, 2, \ldots, 2(m + mn) - 1\}$ sebagai berikut.

$f(u_i) = 2n(i - 1) + 2i - 1$; $i = 1, 2, \ldots, m$.

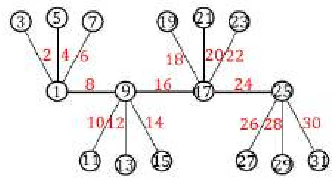
$f(v_j^i) = 2n(i - 1) + 2(i + j) - 2$; $j = 1, 2, \ldots, n$; $i = 1, 2, \ldots, m$.

$f(u_i u_{i+1}) = 2n(i - 1) + 2(i + n)$; $i = 1, 2, \ldots, m - 1$.

$f(u_i v_j^i) = 2n(i - 1) + 2(i + j) - 2$; $j = 1, 2, \ldots, n$; $i = 1, 2, \ldots, m$.

Dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa setiap sisi yang bersisian dengan simpul yang sama memiliki label yang tidak relatif prima, sehingga fungsi f memenuhi pelabelan komposit. Terbukti bahwa graf ulat teratur $C_{m,n}$ dengan $m \geq 2$ dan $n \geq 2$ merupakan graf komposit.■

Gambar 8 merupakan contoh pelabelan komposit pada graf ulat teratur $C_{4,3}$.



Gambar 8. Pelabelan Komposit pada Graf Ulat Teratur $C_{4,3}$

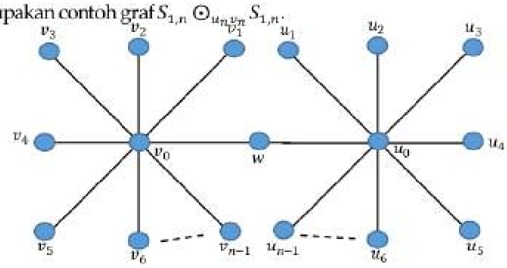
5. Graf hasil identifikasi simpul dua graf bintang homogen

Graf hasil identifikasi simpul dua graf bintang homogen diperoleh dengan menempelkan salah satu simpul anting (simpul berderajat satu) dari masing-masing graf bintang sehingga menghasilkan graf $(S_{1,n} \odot_{u_n v_n} S_{1,n})$. Penotasian simpul dan sisi pada graf hasil identifikasi simpul dua graf bintang homogen $(S_{1,n} \odot_{u_n v_n} S_{1,n})$ sebagai berikut.

$V(S_{1,n} \odot_{u_n v_n} S_{1,n}) = \{v_i; i = 0, 1, \ldots, n-1\} \cup \{w\} \cup \{u_i; i = 0, 1, \ldots, n-1\}$.

$E(S_{1,n} \odot_{u_n v_n} S_{1,n}) = \{v_0 w, v_0 v_i; i = 0, 1, \ldots, n-1\} \cup \{u_0 w, u_0 u_i; i = 0, 1, \ldots, n-1\}$.

Gambar 9 merupakan contoh graf $S_{1,n} \odot_{u_n v_n} S_{1,n}$.



Gambar 9. Penotasian Simpul dan Sisi pada Graf $S_{1,n} \odot_{u_n v_n} S_{1,n}$

Teorema 5. Graf $S_{1,n} \odot_{u_n v_n} S_{1,n}$ dengan $n \geq 2$ merupakan graf komposit.

Bukti. Untuk membuktikan bahwa graf $S_{1,n} \odot_{u_n v_n} S_{1,n}$ dengan $n \geq 2$ merupakan graf komposit yaitu dengan menunjukkan bahwa terdapat fungsi bijektif yang memetakan simpul dan sisi graf ke bilangan bulat positif dengan syarat setiap sisi yang bersisian dengan simpul yang sama memiliki label yang tidak relatif prima. Definisikan fungsi bijektif $f: V(S_{1,n} \odot_{u_n v_n} S_{1,n}) \cup E(S_{1,n} \odot_{u_n v_n} S_{1,n}) \rightarrow \{1, 2, \ldots, 4n+1\}$ sebagai berikut.

$f(v_i) = 2i + 1; i = 0, 1, \ldots, n-1$.

$f(w) = 2n + 1$.

$f(u_i) = 2(n+i) + 3; i = 1, 2, \ldots, n-1$.

$f(v_0 v_i) = 2i; i = 1, 2, \ldots, n-1$.

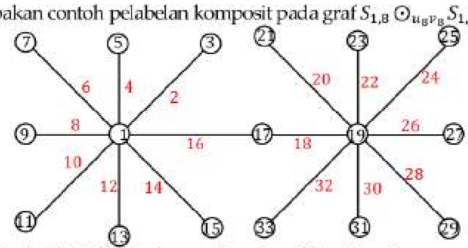
$f(v_0 w) = 2n$.

$f(w u_0) = 2n + 2$.

$f(u_i v_0) = 2(n+i) + 2; i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Dapat diidentifikasi bahwa setiap sisi yang bersisian dengan simpul yang sama memiliki label yang tidak relatif prima, sehingga fungsi f memenuhi pelabelan komposit. Terbukti bahwa graf $S_{1,n} \odot_{u_n v_n} S_{1,n}$ dengan $n \geq 2$ merupakan graf komposit.■

Gambar 10 merupakan contoh pelabelan komposit pada graf $S_{1,8} \odot_{u_8 v_8} S_{1,8}$.



Gambar 10. Pelabelan komposit pada graf $S_{1,8} \odot_{u_8 v_8} S_{1,8}$

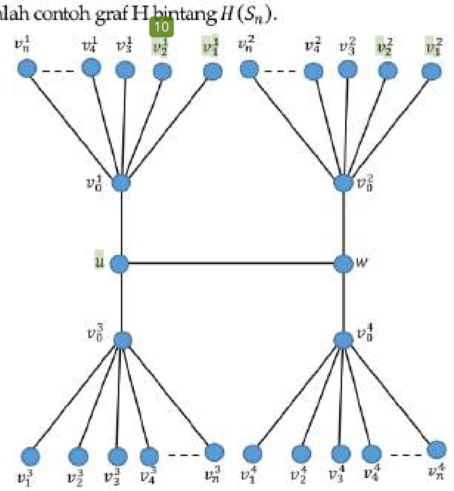
6. Graf H bintang

Graf H bintang memiliki order $4n + 6$ dan ukuran $4n + 5$ dinotasikan dengan $H(S_n)$ merupakan graf yang dibangun dari menduplikasi graf $S_{1,n+1} \odot_{u_{n+1} v_{n+1}} S_{1,n+1}$ dan menghubungkan simpul berderajat dua pada masing-masing duplikasi graf $S_{1,n+1} \odot_{u_{n+1} v_{n+1}} S_{1,n+1}$ dengan sebuah garis. Simpul dan sisi pada graf H bintang dinotasikan sebagai berikut.

$V(H(S_n)) = \{u\} \cup \{w\} \cup \{v_j^i; i = 1, 2, 3, \dots, 4; j = 0, 1, \dots, n\}$.

$E(H(S_n)) = \{u, w\} \cup \{uv_0^1, uv_0^3\} \cup \{wv_0^2, wv_0^4\}$
$\cup \{v_0^i v_j^i; i = 1, 2, \dots, 4; j = 1, 2, \dots, n\}$.

Gambar 11 adalah contoh graf H bintang $H(S_n)$.



Gambar 11. Penotasian Simpul dan Sisi pada Graf H Bintang

Teorema 6. Graf H bintang $H(S_n)$ dengan $n \geq 2$ merupakan graf komposit.

Bukti. Dengan cara yang sama, untuk menunjukkan bahwa graf H bintang $H(S_n)$ dengan $n \geq 2$ merupakan graf komposit yaitu dengan membangun fungsi pelabelan yang memenuhi kaidah pelabelan komposit pada graf tesebut. Definisikan fungsi bijektif $f: V(H(S_n)) \cup E(H(S_n)) \rightarrow \{1, 2, \dots, 8n + 11\}$ sebagai berikut.

$f(v_j^i) = 8j + 2i - 1; i = 1, 2, \dots, 4; j = 0, 1, \dots, n.$

$f(u) = 8n + 9.$

$f(w) = 8n + 11.$

$f(v_0^i v_j^i) = 8j + 2i - 8; i = 1, 2, \dots, 4; j = 1, 2, \dots, n.$

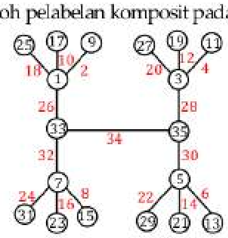
$f(uv_0^i) = \begin{cases} 8n + 2; i = 1, \\ 8n + 8; i = 4. \end{cases}$

$f(wv_0^i) = \begin{cases} 8n + 4; i = 2, \\ 8n + 6; i = 3. \end{cases}$

$f(uw) = 8n + 10.$

Dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa setiap sisi yang bersisian dengan simpul yang sama memiliki label yang tidak relatif prima, sehingga fungsi f memenuhi pelabelan komposit. Terbukti bahwa graf H bintang $H(S_n)$ dengan $n \geq 2$ merupakan graf komposit.■

Gambar 12 merupakan contoh pelabelan komposit pada graf H bintang $H(S_3)$.



Gambar 12. Pelabelan Komposit pada Graf H Bintang $H(S_3)$

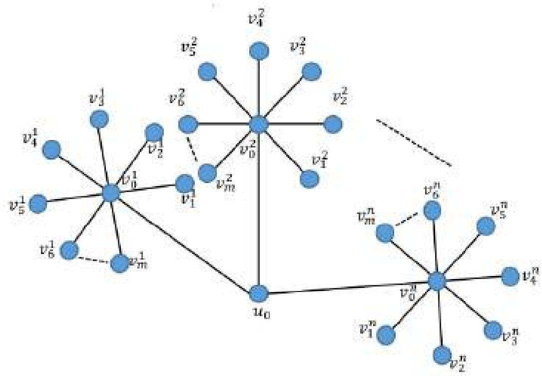
7. Graf ilalang

Graf ilalang $S_{n,m}$ adalah sebuah graf yang dibangun dari operasi penggabungan m salinan graf bintang yang diidentifikasi pada simpul yang berderajat satu. Penotasian simpul dan sisi pada graf ilalang $S_{n,m}$ adalah sebagai berikut.

$V(S_{n,m}) = \{u_0\} \cup \{v_i^j; i \in [0, m]; j \in [1, n]\}$

$E(S_{n,m}) = \{u_0 v_0^j; j \in [1, n]\} \cup \{v_0^j v_i^k; k = j; j \in [1, n]; i \in [1, m]\}.$

Sebagai ilustrasi dari penotasian simpul dan sisi pada graf ilalang dapat dilihat pada Gambar 13.



Gambar 13. Penotasian Simpul dan Sisi pada Graf Ilalang $S_{n,m}$

Teorema 7. Graf ilalang $S_{n,m}$ dengan $n \geq 2$ dan $m \geq 2$ merupakan graf komposit.

Bukti. Dengan cara yang sama, untuk menunjukkan bahwa graf ilalang $S_{n,m}$ dengan $n \geq 2$ dan $m \geq 2$ merupakan graf komposit. yaitu dengan membangun fungsi pelabelan yang memenuhi kaidah pelabelan komposit pada graf tesebut. Definisikan fungsi bijektif $f: V(S_{n,m}) \cup E(S_{n,m}) \rightarrow \{1, 2, \dots, 2(mn + n) + 1\}$ sebagai berikut.

$f(u_0) = 1$

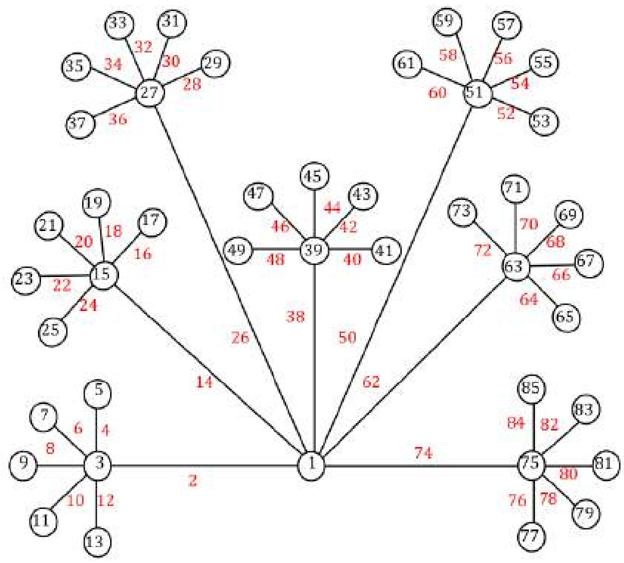
$f(v_i^j) = 2(i + mj + j - m) + 1;; i = 0, 1, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n.$

$f(v_0^j v_i^j) = 2(i + mj + j - m);; i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n.$

$f(v_0^j u) = 2(mj + j - m); j = 1, 2, \dots, n.$

Dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa setiap sisi yang bersisian dengan simpul yang sama memiliki label yang tidak relatif prima, sehingga fungsi f memenuhi pelabelan komposit. Terbukti bahwa ilalang $S_{n,m}$ dengan $n \geq 2$ dan $m \geq 2$ merupakan graf komposit.■

Untuk memperjelas Teorema 7, diberikan contoh pelabelan komposit pada ilalang $S_{7,5}$ yang dapat dilihat pada Gambar 14.



Gambar 14. Pelabelan Komposit pada Graf Ilalang $S_{7,5}$

Simpulan

Penelitian ini menghasilkan pembuktian bahwa sejumlah graf pohon tertentu tergolong sebagai graf komposit. Pembuktian dilakukan melalui metode deduktif aksiomatik dan pendeteksian pola yang menghasilkan fungsi bijektif dengan syarat setiap sisi yang bersisian dengan simpul yang sama memiliki label yang tidak relatif prima. Graf sisir, graf pohon Y, graf sapu, graf ulat teratur, graf hasil identifikasi simpul dua graf bintang homogen, graf H bintang, dan graf ilalang terbukti memenuhi pelabelan komposit. Temuan ini memperluas karakterisasi graf komposit dalam ranah pelabelan graf.

Prospek pengembangan dapat diarahkan pada graf hasil operasi lain atau graf non-pohon untuk mengetahui keberlakuan pelabelan komposit secara lebih luas. Konsep ini juga berpotensi diterapkan dalam pengkodean, jaringan komputer, dan kriptografi yang memerlukan struktur keterhubungan yang khas.

Daftar Pustaka

Berliner, A. H., Hook, J., Mbirika, A., Dean, N., Marr, A., & McBee, C. D. (2016). Coprime and Prime Labelings of Graphs. *Journal of Integer Sequences*, *19*(2), 3. https://doi.org/10.48550/arXiv.1604.07698

Burton, D. M. (2002). *Elementary Number Theory Fifth Edition*. New York: McGraw-Hill.

Chartrand, G. & P. Zhang. (2019). *Chromatic Graph Theory*. Florida: CRC press.

Dhanalakshmi, S., & Parvathi, N. (2018, April). Mean square cordial labelling related to some acyclic graphs and its rough approximations. In *Journal of physics: Conference series* (Vol. 1000, No. 1, p. 012040). IOP Publishing. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1000/1/012040

Harary, F. 1994. *Graph Theory*. Michigan: Addison-Wesley Publishing Company. Boston

Janani, R. dan T. Ramachandran. 2023. Coprime Edge Labeling of Graphs. *SSRN*. 1-11. http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.4486269

Janani, R., & Ramachandran, T. (2022). On Relatively Prime Edge Labeling of Graphs. *Engineering Letters*, 30(2), 659-665.

Karuppuswamy, P., & Kureethara, J. V. (2018). Composite labelling of graphs-II. *World Scientific News*, (99), 227-234.

Komarullah, H. (2024a, March). Pelabelan Total Koprima. In *Prosiding Seminar Pendidikan Matematika dan Matematika* (Vol. 9). https://doi.org/10.21831/pspmm.v9i1.329

Komarullah, H. (2024b, March). P Pelabelan Komposit Pada Graf Memuat Cycle. In *Prosiding Seminar Pendidikan Matematika dan Matematika* (Vol. 9). https://doi.org/10.21831/pspmm.v9i1.326

Komarullah, H., & Wijaya, K. (2022, February). A Minimum Coprime Number for Amalgamation of Wheel. In *International Conference on Mathematics, Geometry, Statistics, and Computation (IC-MaGeStiC 2021)* (pp. 53-57). Atlantis Press. https://doi.org/10.2991/acsr.k.220202.012

Manikandan, T. R., & Sasikala, V. E. (2022). Composite Labelling of Unary Operation of Comp Graph and 2-Tuple of Coconut Tree. *Journal of Algebraic Statistics*, 13(3), 899-906. https://www.publishoa.com/index.php/journal/article/view/704/594

Maria, P. S., & Varghese, K. J. (2017). Composite Labelling of Graphs. *International Journal of Applied Graph Theory*, 1(1), 34-41. https://www.ijagt.com/upload/Composite_Labelling_of_Graphs.pdf

Prajapati, U., & Shah, K. P. (2018). On odd prime labeling. *International journal of Research and Analytical Reviews*, 5(4), 284-294. https://ijrar.com/upload_issue/ijrar_issue_20542373.pdf

Sethujkkarasi, A., & Vidyanandini, S. (2022). Composite Labelling of Some Graphs and Application (No. 7434). EasyChair. https://easychair.org/publications/preprint/7tX4

Surbakti, N. M. (2023). Implementasi Pewarnaan Graf Menggunakan Metode Algoritma Welch Powell pada Penjadwalan Seminar Proposal Skripsi di Program Studi Matematika Universitas Negeri Medan. *Buana*

Matematika: Jurnal Ilmiah Matematika dan Pendidikan Matematika, 13(2), 137-148. https://doi.org/10.36456/buanamatematika.v13i2.7261
Tout, R., Dabboucy, A. N., & Howalla, K. (1982). Prime labeling of graphs. *National Academy Science Letters-India*, 5(11), 365-368.
Wallis, W. D. (2001). *Magic Graphs*. Birkhauser. Boston.
Wijaya, K., & Baskoro, E. T. (2016). On Ramsey (2K_2, 2H)(2 K 2, 2 H)-Minimal Graphs. In *Applied Analysis in Biological and Physical Sciences: ICMBAA, Aligarh, India, June 2015* (pp. 219-225). Springer India.

Riwayat Hidup Penulis

Hafif Komarullah

Lahir di Jember, 12 Maret 1998. Staf pengajar di Program Studi Tadris Matematika Universitas Al-Falah As-Sunniyah, Jember. Studi S1 Matematik, Universitas Jember, Jember, lulus tahun 2020 dan S2 Matematika, Universitas Jember, Jember, lulus tahun 2022. Penulis pernah mempublikasikan jurnal berjudul "Pelabelan Koprima Pada Amalgamasi Graf Lengkap dan Graf Berlian" yang terindeks sinta 2. Penulis juga aktif mengikuti seminar nasional dan internasional, salah satunya yaitu International Conference on Mathematics, Geometry, Statistics, and Computation (IC-MaGeStiC 2021).

document.docx

ORIGINALITY REPORT

23%	21%	12%	5%
SIMILARITY INDEX	INTERNET SOURCES	PUBLICATIONS	STUDENT PAPERS

PRIMARY SOURCES

1	prosiding.himatikauny.org Internet Source	5%
2	escholarship.org Internet Source	4%
3	jurnal.unigal.ac.id Internet Source	3%
4	repository.unej.ac.id Internet Source	1%
5	repository.its.ac.id Internet Source	1%
6	Submitted to University of Durham Student Paper	1%
7	"Total Mean Labeling Graphs", International Journal of Recent Technology and Engineering, 2020 Publication	1%
8	rio.upo.es Internet Source	1%
9	dora.dmu.ac.uk Internet Source	1%
10	ia804705.us.archive.org Internet Source	1%
11	S Pranata, I W Sudarsana, S Musdalifah. "PELABELAN PRIME CORDIAL UNTUK GRAF BUKU DAN GRAF MATAHARI YANG	<1%

	DIPERUMUM", JURNAL ILMIAH MATEMATIKA DAN TERAPAN, 2017 Publication	
12	ejournal2.undip.ac.id Internet Source	<1 %
13	repository.usd.ac.id Internet Source	<1 %
14	www.ijfrcsce.org Internet Source	<1 %
15	Ismiyanti Ismiyanti, I Wayan Sudarsana, Selvy Musdalifah. "PELABELAN PRIME CORDIAL PADA GRAF PRISMA DAN GRAF TERHUBUNG ANTAR PUSAT PADA GRAF RODA", JURNAL ILMIAH MATEMATIKA DAN TERAPAN, 2016 Publication	<1 %
16	ejurnal.undana.ac.id Internet Source	<1 %
17	Liou, J.Y.. "On the Barnett-Lothe tensors for anisotropic elastic materials", European Journal of Mechanics / A Solids, 200811/12 Publication	<1 %
18	William Paulsen. "Abstract Algebra - An Interactive Approach", CRC Press, 2019 Publication	<1 %
19	Michael E. Peskin. "An Introduction To Quantum Field Theory", CRC Press, 2019 Publication	<1 %
20	Submitted to Universitas Nusa Cendana Student Paper	<1 %
21	repository.uin-suska.ac.id Internet Source	<1 %
22	www.readbag.com Internet Source	<1 %

23	eprints.uns.ac.id Internet Source	<1 %
24	A. Akerina, K. A. Sugeng. "Graceful labeling on a multiple-fan graph with pendants", AIP Publishing, 2021 Publication	<1 %
25	R Natalia, I W Sudarsana, S Musdalifah. "PELABELAN L(d,2,1) PADA OPERASI KOMPLEMEN DAN KORONA GRAF LINTASAN DAN SIKLUS", JURNAL ILMIAH MATEMATIKA DAN TERAPAN, 2018 Publication	<1 %
26	www.scribd.com Internet Source	<1 %
27	Aris Gkoulalas-Divanis. "Exact Knowledge Hiding through Database Extension", IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 05/2009 Publication	<1 %
28	vbook.pub Internet Source	<1 %
29	Vaidya, S K, and U M Prajapati. "Some Results on Prime and k-Prime Labeling", Journal of Mathematics Research, 2011. Publication	<1 %

Exclude quotes	On	Exclude matches	Off
Exclude bibliography	On		