Check in

kalkulus tanpa template.docx

RESEARCH - NO REPOSITORY 5

TUGAS B

Universitas Muhammadiyah Sukabumi

Document Details

Submission ID

trn:oid:::1:3600253146

Submission Date

Jun 23, 2026, 7:02 PM GMT+7

Download Date

Jun 23, 2026, 7:03 PM GMT+7

File Name

kalkulus_tanpa_template.docx

File Size

174.0 KB

9 Pages

2,147 Words

14,599 Characters

12% Overall Similarity

The combined total of all matches, including overlapping sources, for each database.

Filtered from the Report

- Bibliography

Top Sources

8% Internet sources

4% Publications

1% Submitted works (Student Papers)

Top Sources

8% Internet sources
4% Publications
1% Submitted works (Student Papers)

Top Sources

The sources with the highest number of matches within the submission. Overlapping sources will not be displayed.

1	Internet	
adoc.pub		5%
2	Publication	
Sudianto Manullang, Dita Aryani, Hanifah Rusydah. "Analisis Principal Componen...		2%
3	Student papers	
Universitas Islam Negeri Raden Fatah		1%
4	Internet	
brightideas.houstontx.gov		1%
5	Internet	
mat.ufpb.br		<1%
6	Publication	
Min Chen. "Theory and application of specular path perturbation", ACM Transacti...		<1%
7	Internet	
kupdf.net		<1%
8	Internet	
jurnal.nurulfikri.ac.id		<1%
9	Internet	
sabri.staff.gunadarma.ac.id		<1%

Verifikasi Teorema Divergensi Gauss pada Domain Bola Simetris di $\mathbb{R}^3$: Pendekatan Analitik dengan Parameter Jari-Jari Konkret

Angelina Laurensia Pardosi[1], Christine Refael Margaretha Lubis[2], Fakhrurozi Arrofiq Saragih[3], Flawrena Noviyani Aritonang[4], Ruth Prima Stefani Nababan[5], Hamidah Nasution[6], Alvi Sahrin Nasution[7]

2 [1]*Program Studi Matematika, Universitas Negeri Medan, Indonesia;** angelina.4241230006@mhs.unimed.ac.id

2 [2]*Program Studi Matematika, Universitas Negeri Medan, Indonesia;* cristinelbs.4243230026@mhs.unimed.ac.id

2 [3]*Program Studi Matematika, Universitas Negeri Medan, Indonesia;* rozisaragih08@gmail.com [4]*Program*
2 *Studi Matematika, Universitas Negeri Medan, Indonesia;* flaurena.4241230021@mhs.unimed.ac.id

2 [5]*Program Studi Matematika, Universitas Negeri Medan, Indonesia;* ruthprimastevani@gmail.com

2 [6]*Program Studi Matematika, Universitas Negeri Medan, Indonesia;* hamidah_mat67@yahoo.com

2 [7]*Program Studi Matematika, Universitas Negeri Medan, Indonesia;* alvinasution90@gmail.com

Abstrak.
Teorema Divergensi Gauss merupakan salah satu teorema integral fundamental dalam kalkulus vektor yang menyatakan kesetaraan antara integral divergensi suatu medan vektor pada suatu domain dengan integral fluks medan vektor melalui permukaan batasnya. Meskipun teorema ini telah dikenal luas, banyak penyajian dalam literatur yang tidak menguraikan proses komputasinya secara eksplisit dan terstruktur, sehingga menyulitkan pemahaman konseptual. Penelitian ini bertujuan menyajikan verifikasi analitik Teorema Divergensi Gauss secara lengkap dan sistematis pada domain bola berjari-jari $R = 12$ di
1 $\mathbb{R}^3$ menggunakan medan vektor $F(x, y, z) = (x, y, z)$. Perhitungan divergensi menghasilkan nilai konstan $\nabla \cdot F = 3$, sehingga integral volume pada domain bola diperoleh sebesar 6912π. Secara terpisah, integral fluks permukaan melalui bola berjari-jari 12 juga menghasilkan nilai 6912π. Kesetaraan kedua nilai tersebut memverifikasi berlakunya Teorema Divergensi Gauss pada domain dan medan vektor yang dikaji. Domain bola dipilih karena simetri radialnya mempermudah proses integrasi sekaligus memberikan interpretasi geometris yang jelas terhadap konsep divergensi dan fluks.
Kata kunci: Teorema Divergensi Gauss, kalkulus vektor, divergensi, fluks permukaan, domain bola.

Abstract.
Gauss's Divergence Theorem is one of the fundamental integral theorems in vector calculus,
4 stating the equivalence between the divergence integral of a vector field over a domain and the flux integral of the field across its bounding surface. Although this theorem is well established, many presentations in the literature do not elaborate on the computational process explicitly and systematically, making conceptual understanding difficult. This study aims to present a complete and systematic analytical verification of Gauss's Divergence
4 Theorem on a spherical domain of radius $R = 12 \; in \; \mathbb{R}^3$ using the vector field $F(x, y, z) = (x, y, z)$. The divergence computation yields the constant value $\nabla \cdot F = 3$, resulting in a volume integral over the spherical domain equal to 6912π. Independently, the surface flux

integral across the sphere of radius 12 also yields 6912π. The equality of both values verifies that Gauss's Divergence Theorem holds for the domain and vector field under consideration. The spherical domain is selected because its radial symmetry simplifies the integration process and provides a geometrically transparent interpretation of divergence and flux.
Keywords: Gauss's Divergence Theorem, vector calculus, divergence, surface flux, spherical domain.

Pendahuluan

Kalkulus vektor merupakan cabang analisis matematika yang memiliki peran sentral dalam pemodelan fenomena fisika dan rekayasa, terutama yang melibatkan medan dan aliran dalam ruang tiga dimensi. Salah satu persoalan mendasar dalam kajian ini adalah bagaimana mengaitkan sifat lokal suatu medan—yang dinyatakan melalui turunan parsial—dengan perilaku globalnya pada suatu domain ruang. Keterkaitan tersebut diformulasikan secara elegan melalui teorema-teorema integral, salah satunya Teorema Divergensi yang dikembangkan oleh Carl Friedrich Gauss sebagai landasan analisis medan kontinu (Stewart, 2016; Marsden & Tromba, 2012).

3 Secara formal, Teorema Divergensi Gauss menyatakan bahwa integral fluks suatu medan vektor melalui permukaan tertutup ekuivalen dengan integral divergensi medan tersebut pada volume yang dibatasinya. Teorema ini tidak hanya relevan secara teoretis, tetapi juga mendasari prinsip-prinsip fisika fundamental seperti hukum kekekalan massa, hukum Gauss dalam elektromagnetisme, dan persamaan kontinuitas dalam mekanika fluida (Kreyszig, 2011; Arfken, Weber, & Harris, 2013). Syarat berlakunya teorema ini adalah bahwa setiap komponen medan vektor memiliki turunan parsial pertama yang kontinu pada domain yang ditinjau (Marsden & Tromba, 2012; Briggs, Cochran, & Gillett, 2015).

Meskipun teorema ini sudah banyak disajikan dalam literatur, sebagian besar penyajiannya bersifat abstrak dan ringkas tanpa menguraikan tahapan komputasi secara menyeluruh. Prastyo (2022) mencatat bahwa sejumlah kajian masih terbatas pada penyajian hasil akhir tanpa memperlihatkan proses integrasi secara lengkap, padahal pemaparan langkah demi langkah sangat diperlukan untuk membangun pemahaman konseptual yang kokoh. Sementara itu, Said dkk. (2023) menunjukkan bahwa domain berbentuk bola memiliki keunggulan analitis karena simetri radialnya mempermudah proses integrasi dan memperjelas interpretasi geometris antara divergensi sebagai besaran lokal dan fluks sebagai besaran global. Lebih jauh, Siregar dan Wahyuni (2019) serta Sari dan Kurniawan (2021) juga menegaskan perlunya verifikasi eksplisit pada domain konkret sebagai upaya penguatan pemahaman teorema integral dalam kerangka kalkulus vektor klasik.

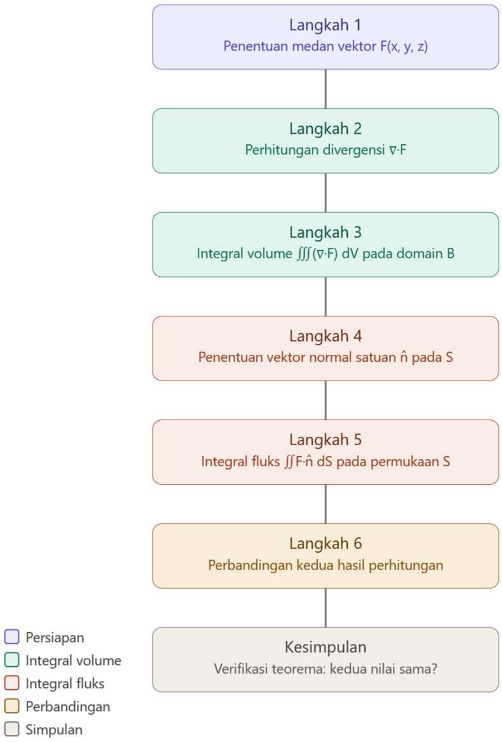
Berdasarkan hal tersebut, penelitian ini menyajikan verifikasi Teorema Divergensi Gauss secara analitik dan sistematis pada domain bola berjari-jari $R = 12\ di\ \mathbb{R}^3$ untuk
1 medan vektor kelas C^1, yaitu $F(x,y,z) = (x,y,z)$. Nilai $R = 12$ dipilih sebagai parameter konkret yang representatif untuk menampilkan keseluruhan proses komputasi secara eksplisit, mulai dari perhitungan divergensi, integral volume dalam koordinat bola, hingga integral fluks permukaan, tanpa menghilangkan satu pun

tahapan analitis. Kontribusi utama penelitian ini terletak pada penyajian verifikasi yang transparan dan komprehensif sehingga dapat menjadi referensi pedagogis yang lebih mudah dipahami dibandingkan penyajian yang hanya memuat hasil akhir.

Metode

Penelitian ini menggunakan pendekatan analitik-deduktif untuk memverifikasi kebenaran Teorema Divergensi Gauss melalui perbandingan langsung antara dua kuantitas integral, yaitu integral volume dari divergensi medan vektor pada domain bola dan integral fluks medan vektor melalui permukaan batas domain tersebut. Pendekatan ini dipilih karena memungkinkan setiap tahapan komputasi disajikan secara eksplisit dan terstruktur, sehingga memperkuat transparansi proses verifikasi. Proses verifikasi dilaksanakan melalui enam tahapan sistematis. Pertama, ditentukan medan vektor yang akan dikaji beserta syarat keteraturannya, yakni bahwa setiap komponen medan memiliki turunan parsial pertama yang kontinu pada domain yang ditinjau. Kedua, dihitung divergensi medan vektor menggunakan definisi standar operator nabla, yaitu $\nabla \cdot F = \frac{\partial F^1}{\partial x} + \frac{\partial F^2}{\partial y} + \frac{\partial F^3}{\partial z}$. Ketiga, dievaluasi integral volume dari divergensi pada domain bola. Karena divergensi medan vektor yang dipilih menghasilkan nilai konstan, integral volume mereduksi menjadi perkalian nilai konstanta tersebut dengan volume domain bola, sehingga tidak diperlukan transformasi ke koordinat bola secara eksplisit. Keempat, ditentukan vektor normal satuan yang mengarah ke luar permukaan bola, dengan memanfaatkan fakta bahwa pada setiap titik permukaan bola berlaku $|r| = R$, sehingga vektor normal satuan keluar dapat dinyatakan sebagai $\hat{n} = \frac{x,y,z}{R}$. Kelima, dievaluasi integral fluks medan vektor melalui permukaan bola. Simetri radial domain bola menjadikan nilai F·n̂ konstan di seluruh permukaan, sehingga integral fluks dapat diperoleh dari perkalian nilai F·n̂ dengan luas permukaan bola, tanpa memerlukan parametrisasi permukaan penuh. Keenam, kedua hasil perhitungan dibandingkan untuk memverifikasi kesetaraannya sesuai pernyataan Teorema Divergensi Gauss.

8 Tahapan verifikasi secara keseluruhan disajikan pada Gambar 1 berikut.



8 (Gambar 1. Diagram alur metode verifikasi Teorema Divergensi Gauss)

Hasil dan Pembahasan

Dalam melakukan verifikasi, terlebih dahulu digunakan konsep dasar dari Teorema
7 Divergensi Gauss pada medan vektor di ruang tiga dimensi. Misalkan suatu medan vektor dinyatakan sebagai

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (F_1, F_2, F_3),$$

dengan setiap komponennya memiliki turunan parsial pertama yang kontinu pada domain yang ditinjau. Divergensi dari medan vektor tersebut didefinisikan sebagai

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

Teorema Divergensi Gauss menyatakan bahwa untuk suatu domain tertutup dengan
3 batas permukaan yang halus, integral fluks medan vektor melalui permukaan tersebut sama dengan integral divergensi medan vektor pada volume yang dibatasinya, yang secara matematis dinyatakan sebagai

$$\iiint_B (\nabla \cdot \mathbf{F})\, dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS,$$

dengan n merupakan vektor normal satuan yang mengarah ke luar permukaan.

Pada penelitian ini, domain yang dikaji adalah sebuah bola di ruang tiga dimensi dengan jari-jari tertentu. Secara matematis, domain tersebut dinyatakan sebagai

1 $$B = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\},$$

dengan batas permukaan berupa bola yang memenuhi

$$S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}.$$

Permukaan bola tersebut merupakan permukaan tertutup dengan vektor normal satuan yang mengarah ke luar. Dalam penelitian ini, digunakan kasus khusus dengan jari-jari $R = 12$untuk mempermudah proses perhitungan dan analisis. Pemilihan domain berbentuk bola didasarkan pada sifat simetri yang dimilikinya, sehingga memudahkan dalam penerapan Teorema Divergensi Gauss.

Berdasarkan domain yang telah ditentukan tersebut, selanjutnya dilakukan verifikasi Teorema Divergensi Gauss pada bola berjari-jari 12 di $\mathbb{R}^3$. Domain tersebut dapat dinyatakan sebagai

1 $$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 144\}$$

dengan batas permukaan:

$$\partial B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 144\}.$$

Verifikasi dilakukan mengikuti tahapan pada metode penelitian yang telah disusun sebelumnya.

Penentuan Medan Vektor

Dalam penelitian ini dipertimbangkan medan vektor berbentuk

1 $$F(x, y, z) = (x, y, z).$$

9 Medan vektor tersebut merupakan fungsi yang kontinu dan memiliki turunan parsial pertama yang kontinu pada seluruh ruang $\mathbb{R}^3$, sehingga memenuhi syarat untuk penerapan Teorema Divergensi Gauss.

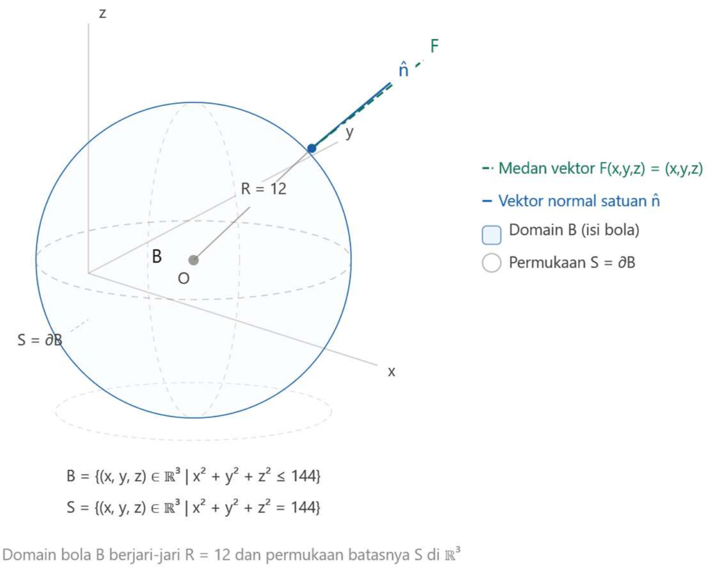
Domain yang digunakan adalah bola berjari-jari Ryang didefinisikan sebagai:

1 $$B = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$$

dengan permukaan batas berupa:

6 $$S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}.$$

Pada penelitian ini digunakan kasus khusus $R = 12$. Ilustrasi domain bola beserta permukaan batasnya disajikan pada Gambar 2 berikut.



Gambar 2. Domain bola B berjari-jari R = 12 dan permukaan batas S di $\mathbb{R}^3$

Perhitungan Divergensi

1 Divergensi dari medan vektor Fadalah

$$\nabla \cdot F = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z)$$

Sehingga diperoleh:

$$\nabla \cdot F = 1 + 1 + 1 = 3$$

Dengan demikian divergensi medan vektor tersebut bernilai konstan, yaitu 3.

Perhitungan Integral Volume

Integral volume divergensi pada domain bola Badalah

$$\iiint_B (\nabla \cdot F)\, dV = \iiint_B 3\, dV = 3 \times \text{Volume}(B)$$

Volume bola dengan jari-jari Radalah

$$\text{Volume}(B) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Sehingga diperoleh:

$$\iiint_B (\nabla \cdot F)\, dV = 3 \times \frac{4}{3}\pi(12)^3 = 3 \times \frac{4}{3}\pi(1728) = 3 \times 2304\pi = 6912\pi$$

Perhitungan Fluks Permukaan

Fluks medan vektor melalui permukaan bola dihitung dengan

$$\iint_S F \cdot n\, dS$$

Pada permukaan bola berlaku $|\, r \,| = R$
Vektor normal satuan keluar adalah

$$n = \frac{(x, y, z)}{R}$$

Sehingga:

$$F \cdot n = \frac{(x, y, z) \cdot (x, y, z)}{R} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{R} = \frac{R^2}{R} = R = 12$$

Luas permukaan bola adalah

$$\mathrm{Luas}(S) = 4\pi R^2 = 4\pi(144) = 576\pi$$

Maka fluks yang diperoleh adalah

$$\iint_S F \cdot n \, dS = 12 \times 576\pi = 6912\pi$$

Verifikasi Teorema
Dari hasil perhitungan diperoleh

$$\iiint_B (\nabla \cdot F) \, dV = 6912\pi$$

dan

$$\iint_S F \cdot n \, dS = 6912\pi$$

Karena kedua nilai tersebut sama, maka hasil ini memverifikasi kebenaran Teorema Divergensi Gauss pada domain bola dengan jari-jari 12untuk medan vektor yang ditinjau.
Hasil verifikasi ini konsisten dengan temuan Prastyo (2022) yang menunjukkan berlakunya Teorema Divergensi Gauss pada berbagai domain di $\mathbb{R}^3$, serta sejalan dengan kajian Said dkk. (2023) yang menegaskan bahwa domain bola merupakan pilihan yang tepat untuk verifikasi teorema ini karena simetri radialnya menghasilkan penyederhanaan komputasi yang signifikan. Dalam penelitian ini, simetri tersebut termanifestasi dalam dua hal: pertama, divergensi medan vektor $F(x, y, z) = (x, y, z)$ menghasilkan nilai konstan sehingga integral volume mereduksi ke perkalian skalar terhadap volume domain; kedua, pada permukaan bola berlaku $|r| = R$ sehingga nilai $F \cdot \hat{n} = R$ konstan di seluruh permukaan, memungkinkan integral fluks dievaluasi hanya dengan mengalikan nilai tersebut dengan luas permukaan bola.
Temuan ini juga memperkuat pernyataan Siregar dan Wahyuni (2019) bahwa penerapan Teorema Divergensi pada medan vektor radial di ruang tiga dimensi menghasilkan identitas yang dapat diverifikasi secara eksak. Berbeda dengan kajian numerik yang menyajikan hasil aproksimasi, verifikasi analitik yang disajikan dalam penelitian ini memperlihatkan kesetaraan yang tepat (exact equality) antara integral

volume dan integral fluks, sehingga memberikan konfirmasi yang kuat terhadap konsistensi teorema pada kasus yang dikaji.

Simpulan

Penelitian ini telah berhasil memverifikasi Teorema Divergensi Gauss secara analitik pada domain bola berjari-jari $R = 12\ di\ \mathbb{R}^3$ untuk medan vektor $F(x, y, z) = (x, y, z)$. Perhitungan menunjukkan bahwa integral volume dari divergensi medan vektor, yaitu $\iiint \_B\ (\nabla \cdot F)\ dV = 6912\pi$, bernilai sama dengan integral fluks medan vektor melalui permukaan bola, yaitu $\iint \_S\ F \cdot \hat{n}\ dS = 6912\pi$. Kesetaraan eksak kedua nilai ini mengkonfirmasi berlakunya Teorema Divergensi Gauss pada domain dan medan vektor yang dikaji.

Secara lebih umum, hasil ini menunjukkan bahwa untuk medan vektor radial $F(x, y, z) = (x, y, z)$ pada domain bola berjari-jari R sembarang, berlaku $\iiint \_B\ (\nabla \cdot F)\ dV = \iint \_S\ F \cdot \hat{n}\ dS = 4\pi R^3$, yang merupakan konsekuensi langsung dari simetri radial domain dan kekonstanan divergensinya. Generalisasi ini menegaskan bahwa domain bola merupakan model geometri yang ideal untuk memperlihatkan konsistensi teorema secara analitik.

Untuk penelitian selanjutnya, disarankan agar verifikasi serupa dilakukan pada domain yang tidak memiliki simetri radial, seperti ellipsoid atau silinder, sehingga diperlukan transformasi koordinat dan parametrisasi permukaan yang lebih kompleks. Selain itu, pengujian dengan medan vektor non-linear seperti $F(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ atau medan dengan komponen campuran dapat memperkaya pemahaman tentang batas-batas penerapan teorema ini. Pengembangan lebih lanjut juga dapat dilakukan dengan mengintegrasikan verifikasi komputasional menggunakan perangkat lunak matematika seperti MATLAB atau Python untuk mendukung pemahaman visual dan numerik secara bersamaan.

Daftar Pustaka

Apostol, T. M. (1969). *Calculus, Volume II: Multi-Variable Calculus and Linear Algebra with Applications*. Wiley.

Arfken, G. B., Weber, H. J., & Harris, F. E. (2013). *Mathematical Methods for Physicists* (7th ed.). Academic Press.

Briggs, W., Cochran, L., & Gillett, B. (2015). *Multivariable Calculus*. Pearson.

Chen, J., & Torres, M. (2019). Revisiting the divergence theorem in modern vector calculus. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 15(3), 45-58.

Hidayat, T. (2018). Kajian medan vektor dan integral lipat tiga dalam pembuktian teorema Gauss. *Jurnal Matematika dan Aplikasinya*, 15(2), 87-96.

Hubbard, J., & Hubbard, B. (2009). *Vector Calculus, Linear Algebra, and Differential Forms*. Matrix Editions.

Kreyszig, E. (2011). *Advanced Engineering Mathematics* (10th ed.). Wiley.

Marsden, J. E., & Tromba, A. J. (2012). *Vector Calculus* (6th ed.). W.H. Freeman.

Prastyo, B. (2022). Pembuktian teorema divergensi Gauss pada berbagai domain di $\mathbb{R}^3$. *Buana Matematika: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*, 12(1), 23-34.

Pratama, R., & Lestari, D. (2020). Analisis integral permukaan dan teorema divergensi pada domain tertutup. *Jurnal Matematika Integratif*, 16(1), 45-54.

Purcell, E. J., Varberg, D., & Rigdon, S. E. (2015). *Kalkulus Jilid 2* (Terjemahan). Erlangga.

Said, A., dkk. (2023). Simetri radial dalam verifikasi teorema divergensi pada bola. *Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*, 10(2), 67-78.

Sari, N., & Kurniawan, A. (2021). Verifikasi teorema integral pada bola di $\mathbb{R}^3$. *Jurnal Pendidikan Matematika dan Sains*, 9(1), 34-42.

Schey, H. M. (2005). *Div, Grad, Curl, and All That* (4th ed.). W.W. Norton.

Siregar, H., & Wahyuni, S. (2019). Penerapan teorema divergensi Gauss pada medan vektor di ruang tiga dimensi. *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, 13(2), 123-132.

Spiegel, M. R., Lipschutz, S., & Spellman, D. (2009). *Vector Analysis (Schaum's Outline Series)*. McGraw-Hill.

Stewart, J. (2016). *Calculus: Early Transcendentals* (8th ed.). Cengage Learning.