Buana Matematika : Jurnal Ilmiah Matematika dan Pendidikan Matematika
p-ISSN : 2088-3021
e-ISSN : 2598-8077
Website :
http://jurnal.unipasby.ac.id/index.php/buana_matematika
Email : buana_matematika@unipasby.ac.id

# *Optimal Control* Model Pemanenan *Prey-Predator* di Area Konservasi Ikan

**Yunita Nur Afifah[1*], MNH Qomarudin[2], Imamatul Ummah[3]**
[1]Teknik Mesin, Universitas Maarif Hasyim Latif, Sidoarjo, Indonesia;
*yunita@dosen.umaha.ac.id
[2] Matematika, Universitas Nahdlatul Ulama, Blitar, Indonesia;
nurhaqqul@unublitar.ac.id
[3]Teknik Elektro, Universitas Hasyim Asy'ari, Jombang, Indonesia;
imamatulummah@unhasy.ac.id

**Abstrak**. Penangkapan ikan dan interaksi *prey-predator* dengan terus-menerus dapat mengakibatkan kepunahan atau berkurangnya populasi ikan sehingga perlu adanya daerah konservasi untuk mengetahui dinamika populasi *prey-predator.* Proses yang dilakukan pada penelitian ini adalah membangun model dinamika populasi *prey-predator* dengan fungsi respon tipe *holling*, mencari titik kesetimbangan, linierisasi, analisis kestabilan, memberikan *optimal control*, dan analisis numerik dengan *Maple* dan *Matlab*. *Optimal control* diberikan dengan menggunakan *Pontryagin Maksimum Prinsiple* untuk menghasilkan pemanenan ikan yang optimal dan menguntungkan dengan biaya minimal saat pemanenan. Selanjutnya didapatkan hasil keuntungan optimal pemanenan ikan dengan meminimalkan biaya dalam pemanenan yaitu sebesar $0.77 < C < 0.95$.
**Kata Kunci**: model, *optimal control*, pemanenan, *prey-predator*.

**Abstract.** Continuous fishing and prey-predator interactions can lead to the extinction or reduction of fish populations so that there is a need for conservation areas to determine the dynamics of prey-predator populations. The process carried out in this research is to build a prey-predator population dynamics model with Holling type response functions, find equilibrium points, linearization, stability analysis, provide optimal control, and numerical analysis with Maple and Matlab. Optimal control is given by using the Pontryagin Maximum Principle to produce optimal and profitable fish harvesting with minimal costs when harvesting. Furthermore, the optimal benefit of harvesting fish is obtained by minimizing the cost of harvesting in the amount of $0.77 < C < 0.95$.
**Keywords**: harvesting, model, optimal control, prey-predator.

## Pendahuluan

Ilmu matematika mempunyai peran penting dalam perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi saat ini. Model matematika adalah bagian dari permasalahan yang ada di dunia nyata yang nyatakan dalam simbol-simbol matematika dan dirumuskan ke dalam bentuk persamaan matematika. Cara hidup atau perilaku makhluk hidup dapat diformulasikan dalam bentuk model matematika. Ilmu matematika mempunyai peran penting dalam membuat model dinamika populasi *prey-predator* dan menentukan cara untuk mengoptimalkan pemanenan ikan. Salah satu penyebab kepunahan populasi adalah tingkat pemangsaan terhadap mangsa yang sangat tinggi dan rendahnya tingkat pertumbuhan mangsa atau rendahnya populasi awal dari populasi mangsa (Marom, 2017).

Fungsi respon pada model mangsa pemangsa *Lotka-Volterra* merupakan fungsi respon sederhana, tidak mempertimbangkan waktu pemangsa dalam mencari dan menangani mangsanya. Kenyataan di ekosistem, interaksi antara mangsa dan pemangsa sering rumit ketika terjadi serangan mangsa oleh pemangsa. Sehingga secara realistik pemangsa memerlukan waktu untuk mencari dan menangani mangsanya (Mortoja, Panja, & Mondal, 2018; Ekawati Ningrum, 2019). Oleh karena itu, fungsi respon pada model mangsa pemangsa Lotka-Volterra dimodifikasi dengan menggunakan fungsi respon *Holling*. Dalam dinamika populasi, fungsi respon *Holling* adalah banyaknya mangsa yang dimangsa per satuan waktu per pemangsa sebagai fungsi kepadatan mangsa (Tang & Xiao, 2015; Ekawati Ningrum, 2019). Fungsi respon ini dibagi menjadi 3 yaitu fungsi respon *Holling tipe I, Holling tipe II, dan Holling tipe III.*

Dari model yang telah dibentuk dengan fungsi respon, selanjutnya pada penelitian (Alaminya et al., 2013) mencari analisis stabilitas lokal dan pengendalian untuk model *Lotka-Volterra* dua mangsa-satu pemangsa. Analisis stabilitas lokal dilakukan untuk mengetahui titik setimbang yang stabil pada model untuk selanjutnya diteliti pengendalian optimalnya. Penelitian selanjutnya kendali optimal pada sistem prey predator dengan pemberian makanan alternatif pada predator dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin diperoleh pengendali optimal dalam sistem prey predator dengan pemberian makanan alternatif pada predator pada selang waktu $0 < t < 5$ sebesar $0{,}342 < C < 0{,}4$ (Resmi, 2019). Dengan bantuan prinsip maksimum Pontryagin dalam memaksimalkan nilai sekarang dari pendapatan, kami menemukan upaya ekstrem yang memaksimalkan nilai sekarang dari pendapatan. Ini berarti bahwa baik mangsa dan predator di kawasan lindung serta mangsa dan predator di daerah yang tidak dilindungi mungkin hidup berdampingan meskipun mangsa dan predator di daerah yang tidak dilindungi dipanen dengan upaya konstan (Toaha & Kasbawati, 2019). Kami telah menganalisis model perikanan mangsa-pemangsa dengan penyebaran mangsa di lingkungan dua tempat, satu adalah diasumsikan sebagai zona penangkapan ikan bebas dan yang lainnya adalah zona cadangan di mana kegiatan penangkapan ikan itu terlarang (Daga, Singh, Jain, & Ujjainkar, 2014).



p-ISSN : 2088-3021
e-ISSN : 2598-8077

Berdasarkan dari penelitian yang ada, tujuan penelitian ini mengembangkan model matematika dengan dua *prey* dan satu *predator* di daerah konservasi. Dengan asumsi *prey* dapat berpindah dari tempat satu ke tempat lainnya, *predator* hidup pada area bebas panen dan mendapatkan makan disana, dan kematian alami *prey-predator* sangat sedikit. Dengan ini dilakukan pencarian titik setimbang agar *prey-predator* tetap lestari dan tidak mengalami kepunahan walaupun terdapat pemanenan. Selanjutnya agar pemanenan ikan menjadi optimal dan menguntungkan, maka diberikan *optimal control* saat pemanenan untuk mendapatkan keuntungan yang maksimal dengan tetap menjaga kelestarian ikan dan meminimalkan biaya saat pemanenan dengan menggunakan *Pontryagin Maksimum Prinsiple*.

**Metode**

Langkah awal menganalisis Suatu model matematika persamaan nonlinier adalah mencari titik setimbang dari model yang telah di buat. Mencari titik kesetimbang bisa didapatkan dari fungsi $f(x) = 0$ dengan $\bar{x}$ merupakan titik kesetimbang dan $f(x) = \frac{dx}{dt}$ merupakan PD yang autonomous. Selanjutnya adalah melakukan analisis kestabilan dengan menggunakan beberapa teorema dan definisi yang mencakup analisis kestabilan sistem linier. Matriks Jacobian merupakan turunan parsial awal dari beberapa fungsi pada elemen-elemen matriksnya. Jika di $\mathcal{R}^3$ terdapat persamaan sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y, z) \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y, z) \quad (2)$$

$$\frac{dz}{dt} = h(x, y, z) \quad (3)$$

Dan bentuk matriks Jacoban yang berukuran $3 \times 3$.

Sistem $\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t)$ stabil asimtoris, apabila semua nilai eigen A, yaitu $\lambda_i(A)$ dan memiliki bagian $\mathbb{R}$ (*negative*) dan dituliskan dengan $Re(\lambda_i(A)) < 0$.

Rustam menyatakan bahwa kestabilan titik keseimbangan juga ditentukan dengan menggunakan uji kestabilan Hurwitz (Rustam, 2011). Dari hasil penelitian diperoleh tiga titik keseimbangan yang salah satunya merupakan titik keseimbangan interior. Analisis kestabilan menggunakan metode pelinearan dan uji kestabilan Hurwitz menunjukkan bahwa titik keseimbangan interior yang diperoleh merupakan titik keseimbangan yang stabil asimptotik.

Pada permasalahan tertentu. Nilai eigen $\lambda$ tidak mudah untuk ditentukan pada tanda bagian realnya, sehingga diperlukan metode lain supaya mengetahui tanda bagian real tersebut. Kriteria Routh-Hurwitz dapat digunakan untuk menentukan nilai eigen matriks $n \times n$ tanda bagian $\mathbb{R}$.



p-ISSN : 2088-3021
e-ISSN : 2598-8077

Metode ini digunakan untuk mengetahui nilai negative pada nilai eigen atau pada bagian realnya dari persamaan karakteristiknya dengan cara melihat koefisien secara langsung tanpa memperhitungkan akar-akar karakteristik.
Misalkan diberikan persamaan karakteristik dengan bentuk:

$$\lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n = 0$$

dengan $\alpha_j$ adalah koefisien yang merupakan bilangan real, $j = 1,2,\cdots,n$.
Dari persamaan diatas, diperoleh $n$ matriks Hurwits $(H_n)$

$$H_n = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \cdots & a_n \end{pmatrix} \text{untuk n (gasal).}$$

$$\text{dan } H_n = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & a_{n-4} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \cdots & a_n \end{pmatrix} \text{untuk n (genap),}$$

dengan $a_j = \begin{cases} a_j, j \leq n \\ 0, \ j > n \end{cases}$

Akar persamaan dapat bernilai negatif atau memiliki nilai negatif pada bagian realnya jika dan hanya jika det $H_j > 0, j = 1,2,\cdots,n$.

***Fungsi Response***

Fungsi respon merupakan fungsi kepadatan mangsa dengan banyaknya makanan yang dimangsa predator. Pada awalnya fungsi respon telah dikemukakan oleh *Lotka-Volterra* yang kemudian dikembangkan oleh *holling* (1950) yang menggambarkan laju pemangsaan dengan ketersediaan makanan. Holling membagi fungsi respon menjadi tiga yaitu fungsi respon *holling* tipe I, *holling* tipe II, dan *holling* tipe III.

**a. Fungsi Respon *Holling* Tipe I**

Adapun fungsi respon *holling* tipe I dapat dituliskan ke dalam persamaan linier berikut :

$$\frac{df_1}{dt} = \alpha x(t) + \theta \qquad (4)$$

Dengan $\frac{df_1}{dt}$ adalah fungsi respon jumlah mangsa yang dimakan dalam persatuan waktu t, $\alpha$ menyatakan efesiensi pemangsaan, $x_t$ adalah populasi mangsa dalam persatuan waktu dan $\theta$ sebagai konstanta.



p-ISSN : 2088-3021
e-ISSN : 2598-8077

### b. Fungsi Respon *Holling* Tipe II

Karakteristik *predator* pada fungsi ini bersifat aktif. Misalnya pada larva kupu-kupu yang selalu memakan dedaunan sepanjang waktu tetapi untuk menghabiskan satu daun memerlukan waktu. Waktu yang diperlukan dalam menyelesaikan satu mangsa $t_m$sama dengan waktu yang diperlukan dalam mencari $t_c$ dan menangani mangsa $(t_m)$. Kemudian $t_m - xt_t$diasumsikan bahwa waktu penanganan mangsa proporsional untuk jumlah tangkapan mangsa $x_t t_m$. Sehingga didapatkan fungsi sebagai berikut :

$$\frac{df_2}{dt} = \frac{\alpha x_t t_t}{1+\alpha x_t t_m} \tag{5}$$

dengan $\frac{df_2}{dt}$ merupakan fungsi respon Holling tipe II.

### c. Fungsi Respon *Holling* Tipe III

Fungsi respon Holling tipe III juga menggambarkan tingkat pertumbuhan predator. Tetapi pada tipe ini dapat terlihat mengenai penurunan tingkat pemangsaan pada saat kepadatan prey rendah. Hal tersebut tidak dapat terlihat pada fungsi respon Holling tipe II. Fungsi respon tipe III terjadi pada predator yang cenderung akan mencari populasi prey yang lain ketika populasi prey yang dimakan mulai berkurang. Karena predator yang cenderung akan mencari populasi prey yang lain, maka tingkat pertemuan antara predator dan prey adalah dua. Adapun fungsi respon ini dapat dituliskan ke dalam bentuk berikut:

$$\frac{df_2}{dt} = \frac{\alpha {x_t}^2 t_t}{1+\alpha {x_t}^2 t_m} \tag{6}$$

dimana merupakan banyaknya mangsa yang dimakan dalam satuan waktu.

### *Optimal Control*

Teori tentang *optimal control* berkembang pada tahun 1950 yang dikenalkan oleh Pontryagin (1962). Sehingga teori ini disebut dengan *pontryagin maksimum prinsiple* atau prinsip maksimum pontryagin. Prinsip maksimum pontryagin merupakan suatu kondisi sehingga dapat diperoleh penyelesaian kontrol optimal yang sesuai dengann tujuan (memaksimalkan indeks performansi). Prosedur menyelesaikan masalah kontrol optimal dengan menggunakan prinsip maksimum Pontryagin adalah sebagai berikut:

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t) \tag{7}$$

Dengan bentuk $x(t) \epsilon\, \Re^n$ dan $u(t) \epsilon\, \Re^m$, dan indeks performasi:

$$J = S\big(x(t_f), t_f\big) + \int_{t_0}^{t_f} V(x(t), u(t), t)\,dt \tag{8}$$



p-ISSN : 2088-3021
e-ISSN : 2598-8077

Dimana nilai kondisi batas $x(t_0) = t_f$ diberikan, dan $x(t_f) = x_f$ bebas. Syarat cukup untuk memaksimalkan indeks performansi $J$ adalah mengkonversi persamaan dengan fungsi Hamiltonian.

## Hasil dan Pembahasan

### *Model Predator-Prey*

model pemanenan ikan *prey-predator* di area konservasi, menggunakan laju pemanenan konstan:

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \sigma_1 x + \sigma_2 y - \frac{\mu_1 x}{\alpha + x} z - q_1 E x \quad (9)$$

$$\frac{dy}{dt} = sy\left(1 - \frac{y}{L}\right) + \sigma_1 x - \sigma_2 y \quad (10)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\beta_1 x}{\alpha + x} z - dz - q_2 E z \quad (11)$$

Keterangan:
$x$ adalah populasi *prey*, pada saat waktu $t$.
$y$ adalah populasi *prey* kedua pada saat waktu $t$.
$z$ adalah populasi *predator*, pada saat waktu $t$.
parameter $r$ adalah laju pertumbuhan intrinsik *prey* pertama
K dan L adalah daya dukung lingkungan (*carrying capacity*).
$\mu_1$ adalah laju konsumsi *prey*
$\sigma_1$ adalah imigrasi *prey* dari area bebas.
$\sigma_2$ adalah emigrasi *prey* dari area konservasi.
E adalah pemanenan oleh manusia.
$q_1$ dan $q_2$adalah konstanta.
$\frac{\mu_1 x}{\alpha + x} z$ adalah (fungsi respon *Holling* type II) adanya interaksi (proses predasi) dengan predator.
s adalah laju pertumbungan intrinsik *prey* kedua.
$\beta_1$ adalah laju konversi predator
d adalah kematian alami *predator*.

Persamaan (1) mendiskripsikan tentang laju perubahan populasi untuk *prey* pada daerah bebas pada tiap waktu. Parameter r adalah model *logistic* yang diukur dari daya tampung lingkungan pada laju pertumbuhan *prey* (K). Berkurangnya prey karena adanya imigrasi dari area bebas ($\sigma_1$) dan mendapatkan tambahan populasi karena *prey* melakukan emigrasi dari daerah konservasi ($\sigma_2$), kemudian berkurang lagi akibat pemanenan (E) *prey* yang dilakukan manusia, dan juga akibat interaksi antara *predator*.

Persamaan (2) mendiskripsikan tentang laju perubahan populasi untuk *prey* pada daerah bebas pada tiap waktu. Notasi s adalah pertumbuhan *logistic* seiring bertambahnya *prey* yang imigrasi ($\sigma_1$). Akan tetapi berkurang akibat adanya emigrasi prey ($\sigma_2$).



p-ISSN : 2088-3021
e-ISSN : 2598-8077

Persamaan (3) mendiskripsikan akan laju laju perubahan populasi untuk *predator*. Dengan adanya interaksi antara keduanya menyebabkan Populasi *predator* semakin meningkat, kemudian berkurang akibat kematian alami d karena siklus kehidupan *predator*. Selanjutnya berkurang Kembali karena pemanenan *predator* oleh manusia $E$.

Berikut adalah asumsi yang diberikan dalam model penelitian ini.

1. P*rey* dapat berpindah dari tempat satu ke tempat lainnya.
2. *Predator* hidup pada area bebas panen dan mendapatkan makan atau *prey* dari daerah itu.
3. Laju kematian individu *prey* diabaikan karena asumsi kematiannya sangat sedikit.

Notasi yang mengasumsikan jumlah individu pada kelompok/populasi tertentu adalah x, y, z ≥ 0. Dan diasumsikan nilai-nilai positif pada parameternya. Kemudian di asumsikan pula tidak adanya emigrasi dari daerah konservasi ke daerah bebas ($\sigma_2 = 0$) dan $r - \sigma_1 - q_1E < 0$ maka $\frac{dx}{dt} < 0$. Demikian pula, tidak adanya imigrasi ikan dari daerah bebas ke daerah yang dikonservasi ($\sigma_1 = 0$) dan $s - \sigma_2 < 0$ maka $\frac{dy}{dt} < 0$. Dapat dilihat juga bahwa ketika $\beta_1 < d$ maka $\frac{dz}{dt}$ menjadi negatif. Oleh karena $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ mendiskripsikan laju perubahan populasi terhadap waktu, maka dapat diartikah bahwa $r - \sigma_1 - q_1E > 0, s - \sigma_2 > 0$, dan $\beta_1 > d$.

***Titik Setimbang dan Kestabilan***

Model *prey-predator* dengan pemanenan mempunyai 3 titik kesetimbang diantaranya titik kesetimbang pada punahnya populasi $E_0 = (0,0,0)$, titik kesetimbang kepunahan pada *predator* $E_1 = (x_1, y_1, 0)$, selanjutnya titik kesetimbang ketiga yaitu populasi dapat hidup berdampingan $E_2 = (x_2, y_2, z_2)$, dengan

$$m = r - \sigma_1 - q_1E$$
$$n = s - \sigma_2$$
$$x_1 = \frac{1}{6}A^{\frac{1}{3}} - \frac{14K^2m^2}{3r^2A^{\frac{1}{3}}} + \frac{2Km}{3r} + \frac{2rKL\sigma_2 n}{sr^2A^{\frac{1}{3}}}$$
$$y_1 = \frac{1}{36r^2A^{\frac{2}{3}}s^2K\sigma_2}\left[\left(-r^2A^{\frac{2}{3}}s + 28K^2m^2s - 4KmrA^{\frac{1}{3}}s - 12rKL\sigma_2 n + 6Kr^2A^{\frac{1}{3}}s + 6Kr^2A^{\frac{1}{3}}s\sigma_1 + 6KrA^{\frac{1}{3}}sq_1E\right)\left(-r^2A^{\frac{2}{3}}s + 28K^2m^2s - 4KmrA^{\frac{1}{3}}s - 12rKL\sigma_2 n\right)\right]$$

Selanjutnya disubstitusikan parameter-parameter berikut;

$$A = \frac{72K^2m(rL\sigma_2n - sKm^2)}{sr^3} - \frac{108K^2L\sigma_2(nm - \sigma_1\sigma_2)}{sr^2} + \frac{4096K^3m^3}{r^3} + 12\sqrt{3}\sqrt{A_1}$$



p-ISSN : 2088-3021
e-ISSN : 2598-8077

$$A_1 = \frac{64p^3}{(sr^2)^3} + \frac{4K^2m^2p^2}{(sr^4)^2} + \frac{36mK^3L\sigma_2p(nm-\sigma_1\sigma_2)}{r(sr^2)^2} + \frac{729K^4L^2\sigma_2(nm-\sigma_1\sigma_2)^2}{(sr^2)^2} - \frac{512K^5m^3L\sigma_2(nm-\sigma_1\sigma_2)}{sr^5}$$

$$p = sK^2m^2 - rKL\sigma_2 n$$
$$h = d + q_2E$$

Sehingga di dapatkan persamaan sebagai berikut;

$$x_2 = \frac{h\alpha}{\beta_1 - h} \tag{12}$$

$$y_2 = \frac{Ln + \sqrt{(Ln)^2 + \frac{4Ls\sigma_1 h\alpha}{\beta_1 - h}}}{2s} \tag{13}$$

$$z_2 = \left(\frac{m}{\mu_1} - \frac{h\alpha r}{(\beta_1 - h)K\mu_1} + \frac{\sigma_2(\beta_1 - h)\left(Ln + \sqrt{(Ln)^2 + \frac{4Ls\sigma_1 h\alpha}{\beta_1 - h}}\right)}{2s\alpha\mu_1 h}\right)\left(\frac{(\beta_1 + 2q_2E)\alpha}{\beta_1 - h}\right) \tag{14}$$

Titik setimbang $E_1$ eksis jika A > 0 dan $A_1$> 0. Ini karena jumlah populasi ikan tidak akan bernilai negatif maupun bilangan kompleks.

Kemudian melakukan analisis kestabilan di tiap titik kesetimbang dengan cara menggunakan kriteria nilai eigen dan Routh-Hurwitz. Maka digunakan matriks Jacobian berikut untuk mengetahui titik kesetimbangan $E_0$,

$$J_{E_0} = \begin{pmatrix} r - \sigma_1 - q_1E & \sigma_2 & 0 \\ \sigma_1 & s - \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & -d - q_2E \end{pmatrix}$$

$J_{E_0}$ adalah proses dari linierisasi model pemanenan ikan *prey-predator* di Titik kesetimbangan $E_0$. Dengan penggunaan $\det(\lambda I - J_{E_0}) = 0$ pada matriks tersebut, sehingga didapatkan persamaan karakteristik sebagai berikut;

$$(-d - q_2E - \lambda)[\lambda^2 - (r - \sigma_1 - q_1E + s - \sigma_2)\lambda + ((r - \sigma_1 - q_1E)(s - \sigma_2) - \sigma_1\sigma_2)] = 0 \tag{15}$$

Dengan syarat stabil asimtotis pada kriteria nilai eigen agar titik setimbang maka nilai eigen bagian $\mathbb{R}$ *negative*. Titik kesetimbang $E_0$ stabil asimtosis jhj $B_1 > 0$ dan $B_2 > 0$, dengan $B_1 = (r - \sigma_1 - q_1E + s - \sigma_2)$ dan $B_2 = ((r - \sigma_1 - q_1E)(s - \sigma_2) - \sigma_1\sigma_2)$.

Untuk titik setimbang $E_1$ didapatkan matriks jacobian,

$$J_{E_1} = \begin{pmatrix} r - \frac{2r}{K}x_1 - \sigma_1 - q_1E & \sigma_1 & -\frac{\mu_1 x_1}{\alpha + x_1} \\ \sigma_1 & s - \frac{2s}{L}y_1 - \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta_1 x_1}{\alpha + x_1} - d - q_2E \end{pmatrix}$$


p-ISSN : 2088-3021
e-ISSN : 2598-8077

Dari perolehan matriks jacobian tersebut, didapatkan persamaan karakteristik dengan menggunakan det($J_{E_1} - \lambda I$) = 0, yaitu

$$\left(\frac{\beta_1 x_1}{\alpha+x_1} - d - q_2 E - \lambda\right)\begin{bmatrix} \lambda^2 + \left(m + n - \frac{2rx_1}{K} - \frac{2sy_1}{L}\right)\lambda + \\ \left(\left(m - \frac{2rx_1}{K}\right)\left(n - \frac{2sy_1}{L}\right) - \sigma_1\sigma_2\right) \end{bmatrix} = 0 \qquad (16)$$

Titik kesetimbang $E_1$ menjadi stabil asimtosis jhj $C_1 > 0$ serta $C_2 > 0$, dengan $C_1 = \left(m + n - \frac{2rx_1}{K} - \frac{2sy_1}{L}\right)$ dan $C_2 = \left(\left(m - \frac{2rx_1}{K}\right)\left(n - \frac{2sy_1}{L}\right) - \sigma_1\sigma_2\right)$.

Untuk titik setimbang $E_2$ didapatkan matriks Jacobian,

$$J_{E_2} = \begin{pmatrix} r - \dfrac{2rx_2}{K} - \sigma_1 - \dfrac{\mu_1 \alpha z_2}{(\alpha + x_2)^2} - q_1 E & \sigma_2 & -\dfrac{\mu_1 x_2}{\alpha + x_2} \\ \sigma_1 & s - \dfrac{2sy_2}{L} - \sigma_2 & 0 \\ \dfrac{\beta_1 \alpha z_2}{(\alpha + x_2)^2} & 0 & \dfrac{\beta_1 x_2}{\alpha + x_2} - h \end{pmatrix}$$

Dari matriks jacobian tesebut, dengan menggunakan det ($J_{E_2} - \lambda I$) = 0, akan tetapi didapatkan kerumitan pada persamaan karakteristik, sehingga dilakukan perhitungan secara numerik dalam menghasilakan titik setimbang $E_2$ yang stabil, yaitu dengan mensimulasikannya pada *software Maple* dengan parameter yang diketahui. Maka parameter yang akan diberikan adalah sebagai berikut.

**Tabel 1.** Nilai Parameter Model Pemanenan Ikan *Prey-predator*

| Parameter | Nilai |
|---|---|
| r | 5 |
| s | 4 |
| K | 40 |
| L | 60 |
| D | 0.3 |
| E | 1 |
| $\sigma_1$ | 2 |
| $\sigma_2$ | 2 |
| $q_1$ | 0.1 |
| $q_2$ | 0.2 |
| $\mu_1$ | 0.94 |
| $\beta_1$ | 0.9 |
| $\alpha$ | 1 |



p-ISSN : 2088-3021
e-ISSN : 2598-8077

**Tabel 2.** Nilai Awal Variabel

| Nilai Awal | x(0) | y(0) | z(0) |
|---|---|---|---|
| 1 | 35 | 30 | 20 |
| 2 | 30 | 25 | 15 |
| 3 | 25 | 30 | 25 |

Dari matrik $J_{E_2}$ maka kita memperoleh matriks A, matriks C didapat dari output yang diinginkan.

**Ketekontrolan dan Keteramatan**

$$A(t) = \begin{bmatrix} r - \frac{2rx}{K} - \sigma_1 - \frac{\mu_1 \alpha \dot{z}_2}{(\alpha+\dot{x}_2)^2} - q_1 E & \sigma_2 & \frac{\mu_1 x}{\alpha+\dot{x}} \\ \sigma_1 & s - \frac{2sy}{L} - \sigma_2 & 0 \\ \frac{\beta_1 \alpha \dot{z}_2}{(\alpha+\dot{x}_2)^2} & 0 & \frac{\beta \dot{z}_2}{\alpha+\dot{x}_2} - d - q_2 E \end{bmatrix}$$

$$B(t) = \begin{bmatrix} -q_1 x \\ 0 \\ -q_2 z \end{bmatrix}$$

$$C(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A(t) = \begin{bmatrix} -5.865 & 2 & -0.914 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0.014 & 0 & 0.375 \end{bmatrix}$$

$$B(t) = \begin{bmatrix} -3.5 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 24.184 \\ -7 \\ -1.549 \end{bmatrix}$$

$$A^2 B = \begin{bmatrix} -5.865 & 2 & -0.914 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0.014 & 0 & 0.375 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5.865 & 2 & -0.914 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0.014 & 0 & 0.375 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3.5 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 34.398 + 4 - 0.013 & -11.73 - 4 & 5.361 - 0.343 \\ -11.73 - 4 & 4 + 4 & -1.828 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 38.385 & -15.73 & 5.018 \\ -15.73 & 8 & -1.828 \\ -0.077 & 0.028 & 0.128 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 24.184 \\ -7 \\ -1.549 \end{bmatrix}$$

$$A^2 B = \begin{bmatrix} -154.420 \\ 62.367 \\ -0.242 \end{bmatrix}$$

*Cek Keterkontrolan Sistem

$$M_c = (B|AB|A^2B)$$

$$= \left( \begin{array}{c|c|c} -3.5 & 24.184 & -154.420 \\ 0 & -7 & 62.367 \\ -4 & -1.549 & -0.242 \end{array} \right)$$

Rank = 3



p-ISSN : 2088-3021
e-ISSN : 2598-8077

*Cek Keteramatan Sistem

$$M_c = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}$$

$$CA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5.865 & 2 & -0.914 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0.014 & 0 & 0.375 \end{bmatrix}$$

$$CA = \begin{bmatrix} -5.865 & 2 & -0.914 \\ 0.014 & 0 & 0.375 \end{bmatrix}$$

$$CA^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 38.385 & -15.73 & 5.018 \\ -15.73 & 8 & -1.828 \\ -0.077 & 0.028 & 0.128 \end{bmatrix}$$

$$CA^2 = \begin{bmatrix} 38.385 & -15.73 & 5.018 \\ -0.077 & 0.028 & 0.128 \end{bmatrix}$$

$$M_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}$$

$$M_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5.865 & 2 & -0.914 \\ 0.014 & 0 & 0.375 \\ 38.385 & -15.73 & 5.018 \\ -0.077 & 0.018 & 0.128 \end{bmatrix}$$

Rank = 3

Berdasarkan dari Tabel 1 dan Tabel 2 maka diperoleh titik kesetimbang dari ketiga populasi yang saling hidup berdampingan ($E_2$), yaitu $E_2$= (1.25; 31.20185175 ; 126.0639402). Dari tiga nilai awal yang diberikan, terlihat bahwa hal itu mengarah ke titik kesetimbang pada $E_2$. Maka dapat dinotasikan secara numerik titik kesetimbang tiga populasi hidup berdampingan $E_2 = (x, y, z) = (x_2, y_2, z_2)$. Pada model pemanenan ikan *prey-predator,* pemanenan ikan di daerah konservasi cenderung ke stabil asimtosis.

Dengan memasukan parameter dan nilai awal ke-3, maka matrik $J_{E_2}$ adalah

$$J_{E_2} = \begin{pmatrix} -3{,}3848 & 2 & -0{,}9038 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0{,}0333 & 0 & 0{,}3654 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya menentukan nilai eigen $J_{E_2} - \lambda I$ dengan matlab diperoleh $\lambda_1 = -4{,}8050, \lambda_2 = -0{,}5650, \lambda_3 = 0{,}3506$. Terdapat $\lambda > 0$ berarti system tak stabil pelana. Misalkan $f = [\, f_1 \; f_2 \, f_3]$ maka persamaan diberikan oleh $(\lambda I - (Z + Bf)) = Ax$, dari nilai eigen dan perhitungan manual.

$$Z = \begin{pmatrix} -3{,}3848 & 2 & -0{,}9038 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0{,}0333 & 0 & 0{,}3654 \end{pmatrix}, B = \begin{bmatrix} -3{,}5 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Sehingga diketahui A= [-4,8050 -0,5650 0,3506].





p-ISSN : 2088-3021
e-ISSN : 2598-8077

Untuk mendapatkan matriks AA(A baru) dengan, AA=Z – B x *place (Z,B,A)*
Tahap berikutnya adalah melihat peristiwa pada usaha dalam pemanenan yang bergantung pada *E(t),* hal ini dapat diasumsikan yang menjadi variable control pada model diatas adalah laju pemanenan *E(t)* dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1-\frac{x}{K}\right) - \sigma_1 x + \sigma_2 y - \frac{\mu_t x}{\alpha+x}z - q_1 E(t)x \quad (17)$$

$$\frac{dy}{dt} = sy\left(1-\frac{y}{L}\right) + \sigma_1 x - \sigma_2 y \quad (18)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\beta_1 x}{\alpha+x}z - dz - q_2 E(t)z \quad (19)$$

**Penyelesaian Kontrol Optimal**

Dalam meningkatkan hasil optimal dalam pemanenan maka digunakan metode *optimal control* yaitu *pontryagin maximum principal* pada model. Sehingga didapatkan hasil yang optimal pada pemanenan populasi ikan akan tetapi tidak menimbulkan kepunahan ikan di area bebas. Dapat didefinisikan fungsi tujuan atau indeks performansi optimal control model pemanenan ikan *prey-predator* sebagai berikut:

$$J = \int_0^{t_f}\left(p_1 q_1 E(t)x + p_2 q_2 E(t)z - \frac{1}{2}CE(t)^2\right)dt \quad (20)$$

Dari fungsi tujuan tersebut diartikan bahwa dengan memaksimalkan *optimal control* fungsi j maka hasil pemanenan menjadi lebih baik atau optimal. Diberikan Parameter harga per satuan ikan yang dipanen yaitu *prey* ($p_1$) dan *predator* ($p_2$). Sedangkan $C$ merupakan parameter biaya pemanenan yang dinyatakan tiap satuan usaha.

Berdasarkan pada *pontryagin maximum principal,* maka tahap awal pertama adalah membangun fungsi Hamiltonian. Maka dari fungsi Hamiltonian di representasikan ke dalam bentuk model pemanenan ikan *prey-predator* di area konservasi sebagai berikut:

$$H(x,E,\gamma,t) = \left(p_1 q_1 E(t)x + p_2 q_2 E(t)z - \frac{1}{2}CE(t)^2\right) + (\gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \gamma_3)\begin{pmatrix} rx\left(1-\frac{x}{K}\right) - \sigma_1 x + \sigma_2 y - \frac{\mu_t x}{\alpha+x}z - q_1 E(t)x \\ sy\left(1-\frac{y}{L}\right) + \sigma_1 x - \sigma_2 y \\ \frac{\beta_1 x}{\alpha+x}z - dz - q_2 E(t)z \end{pmatrix}$$

$$= p_1 q_1 E(t)x + p_2 q_2 E(t)z - \frac{1}{2}CE(t)^2 + \gamma_1\left(rx\left(1-\frac{x}{K}\right) - \sigma_1 x + \sigma_2 y - \frac{\mu_t x}{\alpha+x}z - q_1 E(t)x\right) + \gamma_2\left(sy\left(1-\frac{y}{L}\right) + \sigma_1 x - \sigma_2 y\right) + \gamma_3\left(\frac{\beta_1 x}{\alpha+x}z - dz - q_2 E(t)z\right). \quad (21)$$

Tahap selanjutnya dalam memperoleh kondisi yang optimal pada fungsi hamiltonian $H(x,E,\gamma,t)$ terhadap vektor kontrol *E(t)* maka didapatkan kondisi stasioner yaitu;



p-ISSN : 2088-3021
e-ISSN : 2598-8077

$$\frac{\partial H}{\partial E} = 0$$
$$\Leftrightarrow p_1 q_1 x + p_2 q_2 z - CE - \gamma_1 q_1 x - \gamma_3 q_2 z = 0$$
$$\Leftrightarrow CE = q_1 x(p_1 - \gamma_1) + q_2 z(p_2 - \gamma_3)$$
$$\Leftrightarrow E^* = \frac{q_1 x(p_1-\gamma_1)+q_2 z(p_2-\gamma_3)}{c} \tag{22}$$

dikarenakan batas nilai $E^*$ adalah $0 \le E^* \le 1$ maka muncul kemungkinan yang terjadi pada nilai $E^*$, yaitu:

$$E^* = \begin{cases} 0, & jika \ \frac{q_1 x(p_1-\gamma_1)+q_2 z(p_2-\gamma_3)}{c} \le 0 \\ \frac{q_1 x(p_1-\gamma_1)+q_2 z(p_2-\gamma_3)}{c}, & jika \ \frac{q_1 x(p_1-\gamma_1)+q_2 z(p_2-\gamma_3)}{c} < 1. \\ 1, & jika \ \frac{q_1 x(p_1-\gamma_1)+q_2 z(p_2-\gamma_3)}{c} \ge 1 \end{cases}$$

Dari kemungkinan itu sehingga nilai kontrol optimal menjadi;

$$E^* = min\left(max\left(0, \frac{q_1 x(p_1-\gamma_1)+q_2 z(p_2-\gamma_3)}{c}\right), 1\right) \tag{23}$$

Kemudian setiap parameter di berikan nilai sebagai berikut:

**Tabel 3.** Nilai Simulasi pada Parameter

| $q_1$ | $q_2$ | $p_1$ | $p_2$ | $\gamma_1$ | $\gamma_3$ | x | z | C |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,1 | 0,2 | 70 | 60 | 30 | 30 | 25 | 25 | 80 |

sehingga $E^* = \frac{q_1 x(p_1-\gamma_1)+q_2 z(p_2-\gamma_3)}{c} =$

$$E^* = \frac{0{,}1 \,.\, 25(70-30) + 0{,}2 \,.\, 25(60-30)}{80}$$
$$E^* = \frac{2{,}5(40) + 5(30)}{80}$$
$$E^* = 3{,}125$$

Maka matriks jacobian dari $E^*$ adalah

$$J_{E_2} = \begin{pmatrix} -3{,}5973 & 2 & -0{,}9038 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0{,}0333 & 0 & -0{,}7596 \end{pmatrix}$$

Karena pada nilai $E^*$ masih terdapat x dan z sebagai variabel *state* maka persamaan tersebut harus diselesaikan. persamaan *state* tersebut dinyatakan dengan :

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \gamma_1} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \sigma_1 x + \sigma_2 y - \frac{\mu_1 x}{\alpha + x} z - q_1 E(t) x \tag{24}$$
$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial \gamma_2} = sy\left(1 - \frac{y}{L}\right) + \sigma_1 x - \sigma_2 y \tag{25}$$
$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial \gamma_3} = \frac{\beta_1 x}{\alpha + x} z - dz - q_2 E(t) z \tag{26}$$

Namun, terdapat juga *variable co-state* selain *variable state* pada nilai $E^*$ yang harus diselesaikan yaitu $\gamma_1$dan $\gamma_3$, maka dapat diperoleh persamaan *co-states* sebagai berikut;

$$\dot{\gamma}_1 = \frac{\partial H}{\partial x} = -p_1 q_1 E(t) - \gamma_1 \left( r - \frac{2r}{K} - \sigma_1 - \frac{\mu_1 z \alpha}{(\alpha+x)^2} - q_1 E \right) - \gamma_2 \sigma_1 - \gamma_3 \frac{\beta_1 z \alpha}{(\alpha+x)^2} \quad (27)$$
$$\dot{\gamma}_2 = \frac{\partial H}{\partial y} = -\gamma_1 \sigma_2 - \gamma_2 \left( s - \frac{2s}{L} - \sigma_2 \right) \quad (28)$$
$$\dot{\gamma}_3 = \frac{\partial H}{\partial z} = -p_2 q_2 E(t) + \gamma_1 \frac{\mu_1 x}{\alpha+x} - \gamma_3 \left( \frac{\beta_1 x}{\alpha+x} - d - q_2 E \right) \quad (29)$$

## Simpulan

Berdasarkan analisis diatas dapat disimpulkan, ekosistem laut akan tetap terjaga karena dinyatakan stabil asistotis walaupun pemanenan *predator* diarea bebas dan *prey* diarea konservasi oleh manusia. Selanjutnya untuk untuk menghasilkan pemanenan ikan yang optimal dan menguntungkan dengan biaya minimal saat pemanenan, maka digunakan teori kendali optimal *Pontryagin Maksimum Prinsiple* pada model pemanenan *prey-predator* di area konservasi ikan, dan menghasilkan $E^* = min\left(max\left(0, \frac{q_1 x(p_1-\gamma_1)+q_2 z(p_2-\gamma_3)}{c}\right), 1\right)$. Kemudian dilakukan simulasi numeric dan didapatkan hasil keuntungan optimal pemanenan ikan dengan meminimalkan biaya dalam pemanenan yaitu sebesar $0.77 < C < 0.95$.

## Daftar Pustaka

Afifah, Y. N. (2019). Analysis of Unsteady Magneto Hydro Dynamic ( MHD ) Nano Fluid Flow Past A Sliced Sphere Analysis of Unsteady Magneto Hydro Dynamic ( MHD ) Nano Fluid Flow Past A Sliced Sphere. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 494, 012033. https://doi.org/10.1088/1757-899X/494/1/012033

Agus, S., Toaha, S., & Kasbawati, K. (2018). Analisis Model Populasi Mangsa Pemangsa dengan Area Reservasi dan Pemanenan Pemangsa. Jurnal Matematika Statistika Dan Komputasi, 15(1), 1. https://doi.org/10.20956/jmsk.v15i1.4418

Alaminya, M. M., Rohmah, N. A., Apriliani, E., Matematika, J., Matematika, F., Alam, P., & Sepuluh, I. T. (2013). Pengendalian Populasi Hama pada Model. 2(1), 1–6.

Angelis, G. Z. (2003). System analysis, modelling and control with polytopic linear models.

Daga, N., Singh, B., Jain, S., & Ujjainkar, G. (2014). Stability Analysis of a Prey-Predator Model with a Reserved Area. Advances in Applied Science Research, 5(3), 293–301

Das, K., Srinivas, M. N., Srinivas, M. A. S., & Gazi, N. H. (2012). Chaotic dynamics of a three species prey-predator competition model with bionomic harvesting due to delayed environmental noise as external driving force. *Comptes Rendus - Biologies*, *335*(8), 503–513. https://doi.org/10.1016/j.crvi.2012.06.001

Didiharyono. (2016). Analisis Kestabilan dan Keuntungan Maksimum Model Predator-Prey Fungsi Respon Tipe Holling III dengan Usaha Pemanenan. Jurnal Masagena, 11(2), 314–326.

Ekawati Ningrum, R. (2019). Model Matematika Mangsa Pemangsa Dua Spesies Dengan Fungsi Respon Holling Tipe Ii Dan Perilaku Anti-Pemangsa. *MATHunesa*, *7*(2), 114–121.

Lv, Y., Yuan, R., & Pei, Y. (2013). A prey-predator model with harvesting for fishery resource with reserve area. *Applied Mathematical Modelling*, *37*(5), 3048–3062.

Marom, S. (2017). Pembentukan Model Mangsa Pemangsa dengan Pemanenan pada Pemangsa. *Delta: Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika*, *1*(2), 181–187.

Pada, P., & Pemangsa, P. (2011). Kestabilan model bioekonomi sistem mangsa pemangsa sumber daya perikanan dengan pemanenan pada populasi pemangsa. 1–5.

Pradana, M. S., & Rohmah, A. M. (2018). Pemodelan Angka Pori Pada Stabilisasi Tanah Gambut. Buana Matematika : Jurnal Ilmiah Matematika Dan Pendidikan Matematika, 8(2:), 59–64. https://doi.org/10.36456/buana_matematika.8.2:.1729.59-64

Putra, B. C., & Afifah, Y. N. (2018). Gaussian Mixture Model Untuk Penghitungan Tingkat. Teknika: Engineering and Sains Journal, 2, 53–58.

Putri, P. P. (2013). Analisis Solusi Numerik Model Predator-Prey Dengan Metode Runge-Kutta Orde Empat dan Gill.

Resmi, F. (2019). Kendali Optimal pada Sistem Prey Predator dengan Pemberian Makanan Alternatif pada Predator. *Jurnal Mathematic Paedagogic*, *4*(1), 33. https://doi.org/10.36294/jmp.v4i1.762

Sukokarilinda, W. (2012). *Analisis dan Kontrol Optimal pada Model Penyebaran Virus HIV dalam Tubuh Manusia*. Universitas Airlangga, Surabaya.

Toaha, S., & Kasbawati. (2019). Optimal harvesting of prey-predator fishery modeling in a two patch environment and harvesting in unprotected area. IOP Conference Series: Earth and Environmental Science, 279(1). https://doi.org/10.1088/1755-1315/279/1/012014





p-ISSN : 2088-3021
e-ISSN : 2598-8077

## Riwayat Hidup Penulis

### Yunita Nur Afifah

Lahir di Surabaya, 18 Juni 1991. Saya Dosen Fakultas Teknik di Universitas Maarif Hasyim Latif di Kabupaten Sidoarjo. Ketika S1 saya mengambil Jurusan Pendidikan Matematika di UNIPA Surabaya dan lulus tahun 2014, setelah itu saya melanjutkan studi jenjang S2 di Program Studi Matematika, ITS Surabaya dan lulus tahun 2016.

### M. Nur Haqqul Qomarudin

Lahir di Surabaya, 3 Desember 1993. Saya Dosen Program Studi S1 Matematika di Universitas Nahdlatul Ulama di Kota Blitar. Ketika S1 saya mengambil Jurusan Matematika di ITS Surabaya dan lulus tahun 2015, setelah itu saya melanjutkan studi jenjang S2 di Program Studi Matematika, ITS Surabaya dan lulus tahun 2017 lalu.

### Imamatul Ummah

Lahir di Sidoarjo, 16 Mei 1989. Staf pengajar di universitas hasyim asy'ari. Studi S1 Pendidikan Matematika dan Komputasi Universitas Muhammadiyah Malang, lulus tahun 2011; S2 Matematika Komputasi Institut Teknologi Sepuluh November Surabaya, lulus tahun 2016.



p-ISSN : 2088-3021
e-ISSN : 2598-8077