

## Analisis Kestabilan Model *Predator-Prey* dengan Penambahan Makanan Alternatif dan Fungsi Respon Holling Tipe III

Wilda Mahmudah<sup>1\*</sup>, Mohammad Rifai<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Pendidikan Matematika, Universitas Qomaruddin, Gresik, Indonesia;  
[wilda0403@gmail.com](mailto:wilda0403@gmail.com)

<sup>2</sup>Pendidikan Matematika, Universitas Qomaruddin, Gresik, Indonesia;  
[vianditrivai@gmail.com](mailto:vianditrivai@gmail.com)

**Abstrak.** Model *predator-prey* merupakan model interaksi dan pola perilaku antara dua spesies. Hubungan interaksi tersebut dinyatakan dalam bentuk model sistem dinamik atau persamaan differensial yang bergantung pada waktu. Pada kenyataan di lapangan *predator* sering mencari mangsa lain ketika jumlah mangsa yang biasa dimakannya menurun, sehingga perlu adanya penambahan makanan alternatif dan juga fungsi respon Holling pada model *predator-prey* yang ada. Pada penelitian ini, dilakukan analisis kestabilan pada model sistem *predator-prey* dengan penambahan makanan alternatif dan fungsi respon Holling tipe III. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui bagaimana kestabilan pada sistem tersebut. Prosedur penelitian ini adalah studi literatur, merekonstruksi pembentukan model *predator-prey*, menentukan titik kesetimbangan, menentukan kestabilan dititik kesetimbangan, mensimulasikan sistem *predator-prey*, dan penarikan kesimpulan. Dari hasil analisis didapatkan tiga titik kesetimbangan yaitu kepunahan *predator-prey* ( $E_0$ ), kepunahan *predator* ( $E_1$ ) dan *predator-prey* saling berinteraksi atau hidup bersama ( $E_2$ ). Pada titik kesetimbangan  $E_0$  bersifat tidak stabil, sedangkan pada  $E_1$  dan  $E_2$  bersifat stabil asimtotis dengan syarat batas tertentu. Hasil simulasi numerik juga menunjukkan bahwa stabilitas yang ditunjukkan untuk ketiga titik kesetimbangan juga memberikan hasil yang sama dengan hasil analitik.

**Kata Kunci:** Alternatif Makanan; Fungsi Respon Holling Tipe III; Kestabilan; Model *Predator-prey*;

**Abstract.** The *predator-prey* model is a model of interaction and behavior patterns between two species. Such interaction is presented in the form of dynamic systems or differential equations of time. In the field, *predators* often look for other *prey* while the *prey* which they eat is decreasing, so it is necessary to add alternative food and also Holling type III function response in the *predator-prey* model. In this research, a stability analysis was carried out in the *predator-prey* system by adding alternative food and also Holling type III function response. The purpose of this research is to

know the stability of the system. The procedure of this research was literature review, reconstructing the *predator-prey* model, determining the equilibrium point, determining the stability at the equilibrium point, simulating the solution field and taking phase portraits, and drawing conclusion. The analysis resulted that there were three points of equilibriums, that is, *predator-prey* extinction ( $E_0$ ), *predator* extinction ( $E_1$ ) and the interaction of *prey* and *predator* or when they are living together ( $E_2$ ). If  $E_0$  resulted that the system is unstable, while in  $E_1$  and  $E_2$  the system is asymptotically stable with certain boundary conditions. The numerical simulation also resulted that the stability shown by the three equilibrium points also gave the same results as the analytical results.

**Keywords:** Alternative Food; Holling Type III Functional Response; Stability; *Predator-prey* Model;

### Pendahuluan

Setiap makhluk hidup membutuhkan interaksi dengan makhluk hidup lainnya untuk kelangsungan hidupnya. Interaksi tersebut mengakibatkan terjadinya ketergantungan antar makhluk hidup apapun perannya, baik sebagai produsen, konsumen, ataupun pengurai. Dalam sistem ekologi, interaksi hubungan antara mangsa dan pemangsa disebut *predator-prey*, dimana *prey* merupakan suatu organisme yang dimakan, dan *predator* adalah organisme yang memakan (Ummah & Abadi, 2013). Salah satu ciri dari populasi *prey* adalah lebih cenderung mempunyai stok makanan yang cukup dalam lingkup habitatnya, sedangkan populasi *predator* sangat bergantung pada jumlah populasi *prey*. Jika populasi *prey* menurun, maka populasi *predator* juga akan mengalami penurunan. Ketika populasi *prey* tidak ada maka *predator* tidak akan bisa mempertahankan kelangsungan hidupnya. Begitu pula sebaliknya, *predator* bertindak sebagai pengendali populasi *prey*. Proses makan-dimakan tersebut mempengaruhi keseimbangan populasi makhluk hidup di alam. Keseimbangan makhluk hidup dapat tercapai apabila jumlah rata-rata populasi *predator-prey* sesuai dengan ukuran dan proporsinya (Airlangga, 2016). Secara matematis, interaksi *predator-prey* dapat digambarkan dalam bentuk persamaan model matematika yang melibatkan suatu variabel dan turunannya (Ismagilova, 2014).

Pada Tahun 1926 model matematika sistem *predator-prey* pertama kali didefinisikan oleh Lotka-Volterra sebagai laju pertumbuhan makhluk hidup yang tumbuh secara eksponensial (Ismagilova, 2014). Model Lotka-Volterra tersebut adalah sebagai berikut :

$$f(x, y) = \frac{dx}{dt} = r_1x - \alpha y \quad \dots\dots\dots (1)$$

Copyright © 2020

*Buana Matematika* :

Jurnal Ilmiah Matematika dan Pendidikan Matematika

p-ISSN : 2088-3021

e-ISSN : 2598-8077

$$g(x, y) = \frac{dx}{dt} = -r_2y + \beta y \dots\dots\dots (2)$$

Model Lotka-Voltera tersebut dianggap kurang realistis karena tidak memperhitungkan keterbatasan sumber-sumber kehidupan. Terbatasnya sumber-sumber seperti ruang, makanan, dan juga adanya kepadatan populasi yang dapat menyebabkan populasi dibatasi oleh suatu daya dukung (carrying capacity) lingkungan. Tahun 1948 model Lotka-Voltera dimodifikasi oleh Leslie-Gower dengan mempertimbangkan aspek keterbatasan daya dukung lingkungan dan tingkat persaingan. Model Leslie-Gower mengasumsikan bahwa kedua populasi tumbuh secara logistik dimana daya dukung *predator* sebanding dengan kepadatan *prey* (Mokodompit et al., 2020). Selain itu model tersebut juga mengasumsikan bahwa populasi *predator* mempunyai hubungan timbal balik dengan kelangkaan pada populasi *prey* (Sahamony et al., 2016). Karena adanya keterbatasan daya dukung dan tingkat persaingan maka *prey* mengalami penurunan sehingga perlu adanya penambahan makanan alternatif untuk *predator*. Selain itu fungsi respon pada model Lotka-Voltera masih sangat sederhana, dan tidak mempertimbangkan waktu yang diperlukan *predator* dalam mencari dan mengatasi mangsanya. Pada kenyataan di lapangan, interaksi antara *prey* dan *predator* sering rumit. Oleh karena itu fungsi respon pada model Lotka-Voltera perlu dimodifikasi dengan menggunakan fungsi respon. Fungsi respon merupakan fungsi kepadatan mangsa dengan banyaknya makanan yang dimangsa *predator* (Yunita Nur Afifah et al., 2020). Holling memperkenalkan fungsi respon yang menggambarkan tentang laju pemangsaan *predator* terhadap *prey* (Armin et al., 2017). Fungsi respon Holling terdiri dari tiga macam, yaitu tipe I, II, dan III. Fungsi respon tipe I terjadi ketika *predator* memiliki karakteristik pasif, yakni *predator* lebih suka menunggu mangsanya datang. Fungsi respon tipe II terjadi pada *predator* dengan karakteristik aktif dalam pencarian mangsa. Fungsi respon tipe III terjadi pada *predator* yang cenderung mencari populasi mangsa yang lain ketika populasi mangsa yang biasa dimakan mulai berkurang (Amil Siddik, A.M; Toaha, 2011).

Hubungan dinamis antara *prey* dan *predator* merupakan salah satu topik yang sering dikaji peneliti. Banyak penelitian yang telah dilakukan terhadap sistem *prey predator*. Diantaranya adalah penelitian tentang analisis kestabilan model matematika mangsa pemangsa dua spesies dengan fungsi respon holling tipe II dan perilaku anti pemangsa (Ekawaningrum 2019), kontrol optimum dari sistem *predator-prey* dengan pemberian makanan alternatif bagi *predator* dan adanya usaha pemanenan (Rifai, 2018). Kemudian, penelitian tentang kestabilan model eko-epidemiologi dengan pemanenan konstan pada *predator*

Copyright © 2020

*Buana Matematika* :

Jurnal Ilmiah Matematika dan Pendidikan Matematika

p-ISSN : 2088-3021

e-ISSN : 2598-8077

(Hasan et al., 2019) , kendali optimal pada sistem *prey predator* dengan pemberian makanan alternative pada *predator* (Resmi, 2019), kestabilan model mangsa pemangsa dengan bentuk Leslie\_Gower struktur pada mangsa (Natsir, 2018). Hasil penelitian-penelitian tersebut, menunjukkan bahwa model sistem *predator-prey* sangat menarik untuk diteliti demi pengembangan keilmuan matematika, khususnya matematika ekologi. Perilaku dinamis *predator-prey* dapat dilihat dari kestabilan sistemnya.

Dalam perkembangannya, model sistem *predator-prey* terus mengalami modifikasi demi menggambarkan kondisi yang sebenarnya. Seperti, jika tingkat pertumbuhan populasi *prey* rendah saat populasi *predator* meningkat, maka ada kecenderungan *predator* mencari mangsa yang lain (Didi 2018). Dengan kata lain, *predator* membutuhkan makanan tambahan sebagai alternatif pengganti *prey* utama (Mokodompit et al., 2020). Atau supaya model sistem *predator-prey* lebih realistis maka perlu adanya penambahan fungsi respon Holling pada model..

Berdasarkan uraian tersebut, maka tujuan dari penelitian ini adalah untuk menganalisis kestabilan serta mensimulasikan pola perilaku dari sistem *predator-prey* dengan adanya penambahan makanan alternatif pada *predator* dan adanya fungsi respon holling III. Analisis kestabilan yang dimaksud adalah mengetahui kestabilan dari berbagai titik kesetimbangan. Penelitian ini diharapkan dapat menambah pengetahuan dan referensi utamanya dalam bidang matematika ekologi, serta dapat pula menjadi informasi pada penelitian lanjutan yang serupa.

### **Metode**

Penelitian ini adalah penelitian deskriptif kuantitatif tentang aplikasi matematika pada bidang ekologi dan sumber daya alam. Adapun prosedur penelitian yang digunakan adalah sebagai berikut :

#### 1. Studi Literatur :

Pada tahap ini dilakukan pengkajian dari beberapa buku, jurnal, dan penelitian sebelumnya mengenai model *predator-prey*.

#### 2. Merekonstruksi bentuk model

Pada tahap ini dilakukan rekonstruksi bentuk model *predator-prey* dengan penambahan makanan alternatif dan fungsi respon Holling tipe III.

#### 3. Menentukan Titik Setimbang atau titik tetap

Copyright © 2020

*Buana Matematika* :

Jurnal Ilmiah Matematika dan Pendidikan Matematika

p-ISSN : 2088-3021

e-ISSN : 2598-8077

Menentukan semua titik kesetimbangan dari model sistem *predator-prey* dengan penambahan makanan alternatif dan fungsi respon Holling tipe III. Syarat yang harus dipenuhi dalam menentukan titik setimbang adalah  $f(x, y) = \frac{dx}{dt} = 0$  dan  $g(x, y) = \frac{dy}{dt} = 0$ . Pada penelitian ini ada tiga macam titik kesetimbangan yang ditentukan yaitu titik kesetimbangan saat ketiadaan populasi *predator-prey*, titik kesetimbangan saat kepunahan *predator*, dan titik kesetimbangan saat *predator-prey* saling berinteraksi atau hidup saling berdampingan.

4. Menganalisis kestabilan sistem di titik kesetimbangan

Pada tahap ini dilakukan analisis kestabilan dari sistem *predator-prey* di titik kesetimbangan. Jenis kestabilan dari titik kesetimbangan dapat diketahui dari nilai-nilai eigen persamaan karakteristiknya atau berdasarkan pada kriteria Routh-Hurwitz. (Soleh & Kholipah, 2013). Oleh karena itu, terlebih dahulu dicari persamaan karakteristik dan nilai eigen dari matriks Jacobian. Sistem dikatakan stabil asimtotis, apabila nilai eigen bagian real-nya bernilai negatif.

5. Simulasi

Tahap ini dilakukan simulasi dengan menggunakan Geogebra

6. Menarik kesimpulan

Pada tahap ini dilakukan penarikan kesimpulan.

**Hasil dan Pembahasan**

***Model Prey Predator dengan penambahan makanan alternative dan fungsi respon Holling tipe III***

Model sistem *prey predator* dengan adanya penambahan makanan alternatif bagi *predator* dan penambahan fungsi respon holling tipe III yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

$$f(x, y) = \frac{dx}{dt} = r_1x \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{\alpha yAx^2}{1+x^2} \dots\dots\dots (3)$$

$$g(x, y) = \frac{dy}{dt} = -r_2y + \frac{\alpha\beta yAx^2}{1+x^2} + (1 - A)y \dots\dots\dots(4)$$

dengan  $x = x(t)$  adalah banyaknya populasi *prey* tiap satuan waktu,  $y = y(t)$  adalah banyaknya populasi *predator* tiap satuan waktu, dan  $k, r_1, r_2, \alpha, \beta$  adalah parameter-parameter yang bernilai positif, dimana parameter  $r_1$  adalah laju pertumbuhan maksimum dari populasi *prey*,  $r_2$  adalah laju kematian relatif

*predator* saat ketiadaan *prey*,  $k$  menyatakan daya dukung lingkungan,  $\alpha$  merupakan laju pemangsaan *prey* oleh *predator*, dan  $\beta$  adalah laju konversi biomassa *prey* ke biomassa *predator* sedangkan  $A$  adalah suatu konstanta yang menyatakan proporsi pemberian makanan alternatif bagi *predator*.

Persamaan (3) adalah model laju pertumbuhan populasi *prey* yang dipengaruhi oleh laju pertumbuhan alami  $r_1$  dan menurun karena adanya persaingan antar sesama *prey*, keterbatasan daya tampung  $k$  serta adanya pemangsaan dari *predator*. Sedangkan persamaan (4) disebut model laju pertumbuhan populasi *predator* yang dipengaruhi oleh laju pemangsaan *predator* terhadap *prey* dan penambahan makanan alternatif serta berkurang dengan adanya kematian *prey*. Daerah penyelesaian pada bidang ekologi terutama yang berhubungan dengan pertumbuhan selalu terletak pada kuadran positif yaitu  $R^2+$  dimana  $r_2 > 1 - A$ .

### **Titik Keseimbangan**

Titik keseimbangan diperoleh dari kondisi  $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$  pada persamaan (3) dan (4) sehingga diperoleh titik keseimbangan sebagai berikut :

1. Titik keseimbangan saat ketiadaan populasi *predator-prey*  
Titik keseimbangan saat ketiadaan *predator-prey* adalah  $E_0(x_0, y_0) = E_0(0, 0)$
2. Titik keseimbangan saat kepunahan *predator*  
Titik keseimbangan saat kepunahan *predator* adalah  $E_1(x_1, 0) = E_1(k, 0)$
3. Titik keseimbangan saat *predator-prey* saling berinteraksi atau saling berdampingan ( terdapat populasi *prey* dan *predator* sehingga saling berinteraksi)  
Titik keseimbangan saat *predator-prey* saling berinteraksi atau saling berdampingan adalah  $E_2(x_2, y_2) = E_2(\sqrt{p}, \frac{r_1(1-\sqrt{p})}{\alpha A \sqrt{p}})$  dengan  $p = \frac{r_2 - 1 + A}{\alpha \beta A - r_2 + 1 - A}$

### **Analisis kestabilan Sistem di Titik Keseimbangan**

Untuk mendapatkan kestabilan dari masing - masing titik keseimbangan maka terlebih dahulu dilakukan pelinieran. Kestabilan sistem pada setiap titik keseimbangan ditentukan dengan mencari nilai eigen atau akar - akar dari persamaan karakteristik.

Matriks Jacobian pada sistem *prey predator* persamaaan (3) dan (4) adalah sebagai berikut :

Copyright © 2020

*Buana Matematika* :

Jurnal Ilmiah Matematika dan Pendidikan Matematika

p-ISSN : 2088-3021

e-ISSN : 2598-8077

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} r_1 - \frac{2r_1x}{k} - \frac{2\alpha y Ax}{(1+x^2)^2} & -\frac{\alpha Ax^2}{1+x^2} \\ \frac{2\alpha\beta y Ax}{(1+x^2)^2} & -r_2 + \frac{\alpha\beta Ax^2}{1+x^2} + (1-A) \end{pmatrix}$$

Dengan menggunakan Matriks jacobian tersebut, maka dilakukan analisis kestabilan sistem dengan mendapatkan nilai karakteristik dari determinan matriks jacobian tersebut, sehingga diperoleh :

1. Kestabilan di titik setimbang kepunahan *predator-prey* ( $E_0$ )

Matriks jacobian model (3) dan (4) pada  $E_0(0,0)$  adalah :

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & -r_2 + (1-A) \end{pmatrix}$$

Berdasarkan matriks jacobian maka diperoleh persamaan karakteristik di titik kesetimbangan  $E_0$  sebagai berikut :

$$\det \begin{pmatrix} r_1 - \lambda & 0 \\ 0 & -r_2 + (1-A) - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(r_1 - \lambda)(-r_2 + (1-A) - \lambda) = 0$$

Sehingga diperoleh nilai eigen :

$$\lambda_1 = r_1 \quad \text{atau} \quad \lambda_2 = -r_2 + (1-A)$$

Karena  $r_1$  merupakan parameter yang selalu bernilai positif maka  $\lambda_1$  selalu bernilai positif, sedangkan  $\lambda_2$  akan selalu bernilai negatif karena  $r_2 > (1-A)$ . Oleh karena itu titik kesetimbangan  $E_0$  bersifat tidak stabil (*saddle*). Hal ini memberikan arti bahwa dalam kurun waktu yang lama tidak akan ada populasi *prey* yang bertahan hidup sehingga populasi *predator* akan punah.

2. Kestabilan di titik setimbang kepunahan *predator* ( $E_1$ )

Matriks jacobian model (3) dan (4) pada  $E_1(k,0)$  adalah

$$J(E_1) = \begin{pmatrix} -r_1 & \frac{-\alpha Ak^2}{1+k^2} \\ 0 & -r_2 + \frac{\alpha\beta Ak^2}{1+k^2} + (1-A) \end{pmatrix}$$

Berdasarkan matriks jacobian tersebut maka diperoleh persamaan karakteristik di titik kesetimbangan kepunahan *predator* sebagai berikut :

Copyright © 2020

*Buana Matematika* :

Jurnal Ilmiah Matematika dan Pendidikan Matematika

p-ISSN : 2088-3021

e-ISSN : 2598-8077

$$\det \begin{pmatrix} -r_1 - \lambda & \frac{-\alpha Ak^2}{1+k^2} \\ 0 & -r_2 + \frac{\alpha \beta Ak^2}{1+k^2} + (1-A) - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(-r_1 - \lambda) \left( -r_2 + \frac{\alpha \beta Ak^2}{1+k^2} + (1-A) - \lambda \right) = 0$$

Sehingga diperoleh nilai eigen :

$$\lambda_1 = -r_1 \quad \text{atau} \quad \lambda_2 = -r_2 + \frac{\alpha \beta Ak^2}{1+k^2} + (1-A)$$

Karena  $r_1 \geq 0$  maka  $\lambda_1$  selalu bernilai negatif, dan  $\lambda_2$  akan bernilai negatif untuk  $r_2 > \frac{\alpha \beta Ak^2}{1+k^2} + (1-A)$  maka pada kondisi ini sistem akan stabil asimtotis jika memenuhi  $r_2 > \frac{\alpha \beta Ak^2}{1+k^2} + (1-A)$ . Sedangkan untuk  $r_2 < \frac{\alpha \beta Ak^2}{1+k^2} + (1-A)$  pada titik kesetimbangan ini bersifat tidak stabil. Pada kondisi ini pertumbuhan *prey* mencapai pertumbuhan maksimum sedangkan *predator* mengalami kepunahan.

3. Kestabilan di titik setimbang *prey predator* saling berinteraksi atau hidup bersama ( $E_2$ )

Matriks jacobian model (3) dan (4) pada  $E_2(x_2, y_2)$  adalah

$$J(E_2) = \begin{pmatrix} r_1 - \frac{2r_1x_2}{k} - \frac{2\alpha y_2 Ax_2}{(1+x_2^2)^2} & \frac{-\alpha Ax_2^2}{1+x_2^2} \\ \frac{2\alpha \beta y_2 Ax_2}{(1+x_2^2)^2} & -r_2 + \frac{\alpha \beta Ax_2^2}{1+x_2^2} + (1-A) \end{pmatrix}$$

Berdasarkan matriks jacobian maka diperoleh persamaan karakteristik di titik setimbang *prey predator* saling berinteraksi atau hidup bersama sebagai berikut :

$$\det \begin{pmatrix} r_1 - \frac{2r_1x_2}{k} - \frac{2\alpha y_2 Ax_2}{(1+x_2^2)^2} - \lambda & \frac{-\alpha Ax_2^2}{1+x_2^2} \\ \frac{2\alpha \beta y_2 Ax_2}{(1+x_2^2)^2} & -r_2 + \frac{\alpha \beta Ax_2^2}{1+x_2^2} + (1-A) - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\left( r_1 - \frac{2r_1x_2}{k} - \frac{2\alpha y_2 Ax_2}{(1+x_2^2)^2} - \lambda \right) \left( -r_2 + \frac{\alpha \beta Ax_2^2}{1+x_2^2} + (1-A) - \lambda \right) - \left( \frac{-\alpha Ax_2^2}{1+x_2^2} - \frac{\alpha Ax_2^2}{1+x_2^2} \right) \left( \frac{2\alpha \beta y_2 Ax_2}{(1+x_2^2)^2} \right) = 0$$

Sehingga diperoleh persamaan karakteristiknya

$$a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$$

dengan

$$a_0 = 1$$

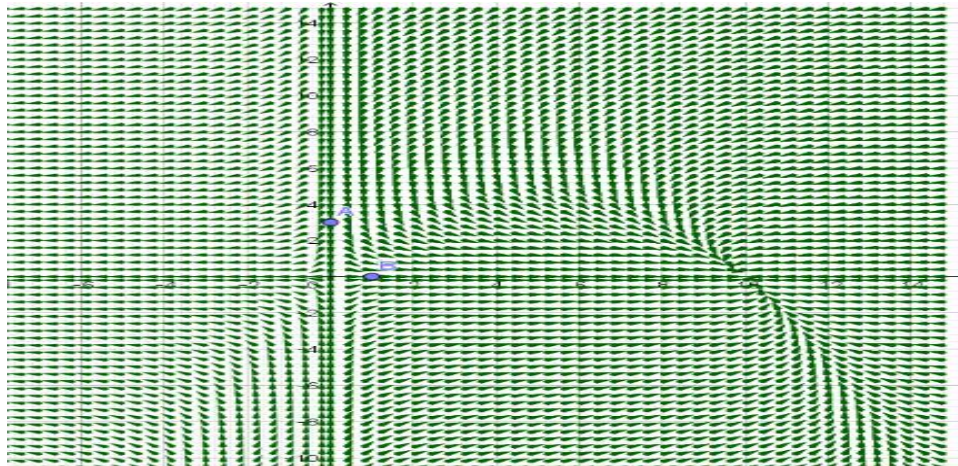
$$a_1 = -r_1 + \frac{2r_1x_2}{k} + \frac{2\alpha Ax_2y_2}{(1+x^2)^2} - \frac{\alpha\beta Ax_2^2}{(1+x^2)^2} + r_2 - (1-A)$$

$$a_2 = -r_1r_2 + r_1(1-A) - \frac{2\alpha\beta Ar_1x_2^3}{k(1+x^2)^2} - \left( \frac{2r_1r_1x_2 - 2r_1x_2(1-A)}{k} \right) + \left( \frac{\alpha\beta Ar_1x_2^2 - 2r_1x_2(1-A)}{1+x_2^2} \right) + \left( \frac{2\alpha Ax_2y_2(r - (1-A))}{(1+x_2)^2} \right)$$

Kestabilan pada kasus ini diperoleh melalui kriteria kestabilan Routh-Hurwitz. Menurut aturan Routh - Hurwitz nilai eigen dari persamaan sehingga pada titik kesetimbangan  $E_2$  dikatakan stabil jika  $a_1 > 0$  dan  $a_2 > 0$ . Oleh karena itu pada titik ini terjadi kestabilan asimtotik.

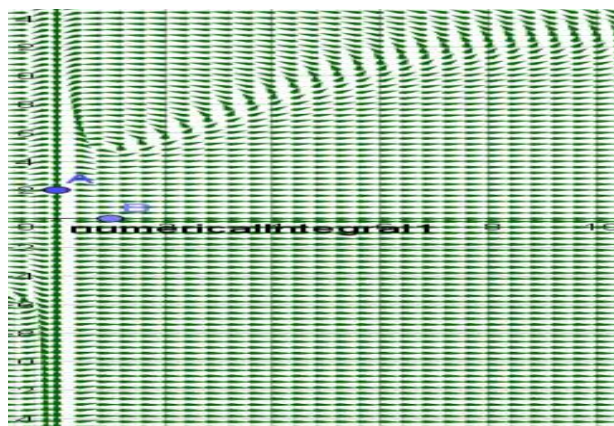
Simulasi dilakukan untuk melihat kesesuaian antara hasil analisis dengan numeriknya. Simulasi dilakukan dengan menggunakan Geogebra. Adapun parameter yang digunakan adalah  $r_1=0.6$  ;  $\alpha = 0.4$  ;  $\beta = 0.2$ ;  $A=0.6$ . Simulasi dilakukan pada beberapa titik kesetimbangan.

Gambar 1 menunjukkan hasil simulasi dengan  $k = 10$ , dan  $r_2=0,6$  dengan kata lain memenuhi  $r_2 > \frac{\alpha\beta Ak^2}{1+k^2} + (1-A)$  . pada Gambar 1 terlihat ada dua titik kesetimbangan yaitu  $E_0(0,0)$  dan  $E_1(k,0)=E_1(10,0)$  . Semua panah terlihat menjauhi titik  $0(0,0)$ , sehingga dikatakan bahwa titik kesetimbangan  $E_0(0,0)$  bersifat tidak stabil (*saddle*) sedangkan pada  $E_1(10,0)$  terlihat bahwa semua panah mengarah ke titik  $(10,0)$  sehingga dikatakan bahwa  $E_1(10,0)$  bersifat stabil asimtotis. Hal ini sesuai dengan hasil analisis bahwa titik  $E_1$  akan stabil ketika memenuhi kondisi  $r_2 > \frac{\alpha\beta Ak^2}{1+k^2} + (1-A)$ . Jadi pada titik  $E_1$  terjadi kestabilan jumlah *predator* dan *prey*.



Gambar 1. Trayektori di  $E_0$  bersifat tidak stabil dan  $E_1$  bersifat stabil asimtotis

Gambar 2 menunjukkan hasil simulasi dengan  $r_2 = 0.42$  dan  $k = 10$ , adapun nilai  $k$  yang digunakan disini merujuk pada penelitian Sahamony dkk (Sahamony et al., 2016). Pada Gambar 2 terlihat bahwa semua panah mengarah ke titik  $(0.84, 5.2)$ , hal ini berarti pada titik kesetimbangan  $(x_2, y_2) = (0.84, 5.2)$  bersifat stabil. Ketika  $r_2 = 0.42$  memenuhi kondisi  $a_1 > 0$  dan  $a_2 > 0$ . Hal ini sesuai dengan hasil analisis diawal yang menyatakan bahwa sistem akan stabil pada kesetimbangan  $E_2$  dengan syarat  $a_1 > 0$  dan  $a_2 > 0$ . Begitu juga dengan simulasi pada titik kesetimbangn lainnya. Beberapa simulasi yang dilakukan juga menunjukkan bahwa ada kesesuaian antara hasil analitik dengan hasil simulasi numerik. Selain itu dari simulasi juga terlihat bahwa jika  $A$  semakin besar maka system akan semakin cepat stabil menuju titik kesetimbangan, hal ini sesuai dengan penelitian Safiti yang menyatakan bahwa semakin besar makanan tambahan yang diberikan kepada pemangsa Sistem akan semakin cepat stabil menuju titik tetap. (Safitri & Mardlijah, 2019).



Gambar 2. Trayektori  $E_2$  yang stabil

Copyright © 2020

*Buana Matematika* :

Jurnal Ilmiah Matematika dan Pendidikan Matematika

p-ISSN : 2088-3021

e-ISSN : 2598-8077

## Simpulan

Berdasar pembahasan diatas diperoleh bahwa :

1. Model *Predator-Prey* dengan penambahan makanan alternatif dan fungsi respon holling tipe III adalah sebagai berikut :

$$f(x, y) = \frac{dx}{dt} = r_1x \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{\alpha y A x^2}{1 + x^2}$$

$$g(x, y) = \frac{dy}{dt} = -r_2y + \frac{\alpha \beta y A x^2}{1 + x^2} + (1 - A)y$$

2. Berdasar hasil analisis diperoleh tiga titik kesetimbangan dan sifat kestabilannya yaitu :
  - a.  $E_0(0,0)$  yang bersifat tidak stabil, yang berarti bahwa dalam kurun waktu yang cukup lama tidak ada populasi *prey* yang bertahan hidup sehingga populsi *predator* juga akan punah.
  - b.  $E_1(k,0)$  yang bersifat stabil asimtotis dengan syarat memenuhi syarat  $r_2 > \frac{\alpha \beta A k^2}{1+k^2} + (1 - A)$ . Hal ini berarti bahwa jika syarat batas tersebut terpenuhi maka untuk waktu yang lama *prey* dapat bertahan hidup sehingga populasi *predator* juga akan bertahan hidup.
  - c.  $E_2(x_2, y_2)$  yang bersifat stabil asimtotis dengan syarat  $a_1 > 0$  ,  $a_2 > 0$ . Hal ini berarti bahwa jika syarat batas tersebut terpenuhi maka untuk waktu yang lama *prey* dapat bertahan hidup sehingga populasi *predator* juga akan bertahan hidup sesuai dengan proporsi mangsanya.
  - d. Hasil simulasi menunjukkan hasil yang sama dengan hasil analisis.

## Daftar Pustaka

- 39-Article Text-60-1-10-20180817 (2).pdf. (n.d.).
- Airlangga, P. U. (2016). *Apln – perpustakaan universitas airlangga. Cd*, 6–25.
- Amil Siddik, A.M; Toaha, s; kasbawati et all. (2011). *Kestabilan Model Mangsa Pemangsa*. 8(2), 23–32.
- Armin, Toaha, S., & Kasbawati. (2017). ANALISIS KESTABILAN PADA MODEL DUA MANGSA- SATU PEMANGSA DENGAN FUNGSI RESPON HOLLING DAN PEMANENAN. *Matematika Dan Aplikasinya*.
- EKAWATI NINGRUM, R. (2019). Model Matematika Mangsa Pemangsa Dua Spesies Dengan Fungsi Respon Holling Tipe Ii Dan Perilaku Anti-Pemangsa. *MATHunesa*, 7(2), 114–121.
- Hasan, N., Resmawan, R., & Rahmi, E. (2019). Analisis Kestabilan Model Eko-Epidemiologi dengan Pemanenan Konstan pada *Predator*. *Jurnal Matematika, Statistika Dan Komputasi*, 16(2), 121. <https://doi.org/10.20956/jmsk.v16i2.7317>

Copyright © 2020

*Buana Matematika* :

Jurnal Ilmiah Matematika dan Pendidikan Matematika

p-ISSN : 2088-3021

e-ISSN : 2598-8077

- Ismagilova, G. (2014). No 主観的健康感を中心とした在宅高齢者における健康関連指標に関する共分散構造分析Title. 11(c), 363–367.
- Mokodompit, R., Nurwan, N., & Rahmi, E. (2020). Bifurkasi Periode Ganda dan Neimark-Sacker pada Model Diskret Leslie-Gower dengan Fungsi Respon Ratio-Dependent. *Limits: Journal of Mathematics and Its Applications*. <https://doi.org/10.12962/limits.v17i1.6809>
- Natsir, N. (2018). Kestabilan Model Mangsa Pemangsa dengan Bentuk Leslie-Gower Struktur pada Mangsa. 5(2), 17–26.
- Resmi, F. (2019). Kendali Optimal pada Sistem Prey Predator dengan Pemberian Makanan Alternatif pada Predator. *JURNAL MATHEMATIC PAEDAGOGIC*. <https://doi.org/10.36294/jmp.v4i1.762>
- Safitri, O., & Mardlijah, M. (2019). Kontrol Optimum pada Model Predator-prey dengan Pemanenan pada Ikan Prey dan Ikan Predator. *Limits: Journal of Mathematics and Its Applications*. <https://doi.org/10.12962/limits.v16i1.4607>
- SAHAMONY, N. F., SIANTURI, P., & JAHARUDDIN, J. (2016). ANALISIS BIFURKASI MODEL LESLIE GOWER TIPE HOLLING II DENGAN WAKTU TUNDA. *Journal of Mathematics and Its Applications*. <https://doi.org/10.29244/jmap.15.1.33-44>
- Soleh, M., & Kholipah, S. (2013). Model Matematika Mangsa-Pemangsa Dengan Sebagian Mangsa Sakit. *Jurnal Sains, Teknologi Dan Industri*, 10(2), 59–63.
- Ummah, C., & Abadi. (2013). Analisis Kestabilan Model Ekoepidemiologi Dengan Pemanenan Sebagai Kontrol Penyebaran Penyakit. *MATHunesa*.
- Yunita Nur Afifah, MNH Qomarudin, & Imamatul Ummah. (2020). Optimal Control Model Pemanenan Predator-prey di Area Konservasi Ikan. *Buana Matematika : Jurnal Ilmiah Matematika Dan Pendidikan Matematika*, 10(1), 1–16. <https://doi.org/10.36456/buanamatematika.v10i1.2410>

## Riwayat Hidup Penulis

### Wilda Mahmudah



Lahir di Gresik, 04 Maret 1984. Dosen di Universitas Qomaruddin. Studi S1 Matematika ITS Surabaya, Lulus Tahun 2006; S2 Matematika ITS Surabaya, Lulus tahun 2009.

Copyright © 2020

*Buana Matematika* :

Jurnal Ilmiah Matematika dan Pendidikan Matematika

p-ISSN : 2088-3021

e-ISSN : 2598-8077

## Mohammad Rifai



Lahir di Gresik, 10 Maret 1989. Dosen di Universitas Qomaruddin. Studi S1 Matematika ITS Surabaya, Lulus Tahun 2012; S2 Matematika ITS Surabaya, Lulus tahun 2014.

Copyright © 2020

*Buana Matematika* :

Jurnal Ilmiah Matematika dan Pendidikan Matematika

p-ISSN : 2088-3021

e-ISSN : 2598-8077

