DIMENSI METRIK PADA GRAF TURAN

Ninik Mutianingsih
Universitas PGRI Adi Buana Surabaya
email : ninikmutia27@gmail.com

Abstrak

Himpunan W adalah resolving set (himpunan pembeda) dari G jika setiap simpul di G memiliki representasi tunggal pada W yang ditentukan oleh jarak dari simpul dari G terhadap simpul di W. Dimensi metrik dari G adalah kardinalitas minimum dari resolving set pada G. Pada paper ini akan dijelaskan tentang dimensi metrik pada graf Turan, yaitu graf multipartisi komplit yang dinotasikan dengan $T_{k,n}$ dengan k adalah banyaknya seluruh simpul dari graf dan n adalah banyaknya partisi. Dimensi metrik dari graf $T_{k,n}$ dengan $k = n^2$ adalah $dim(T_{k,n}) = k - n$. Sedangkan untuk graf Turan yang tidak komplit $T_{k,n}$ yang memiliki order $k - 1$ dengan menjaga keterhubungan antara setiap simpul pada semua partisi memiliki dimensi metrik yaitu $dim(|T_{k,n}| = k - 1) = 1$.

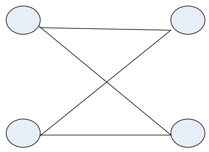
***Kata Kunci** : dimensi metrik, graf Turan, resolving set*

A. Pendahuluan

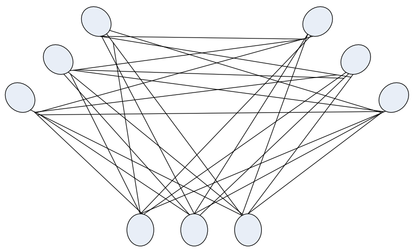
Teori graf aljabar adalah cabang dari matematika yang mempelajari graf dengan menggunakan sifat-sifat aljabar [1]. Graf satu dengan yang lainnya mempunyai karakter masing-masing sehingga berbeda antara satu sama lain. Salah satu karakter tersebut adalah dimensi metrik.

Dimensi metrik pertama kali dikenalkan oleh Harary dan Melter [2]. Dimensi metriks adalah *resolving set* dari G dengan kardinalitas minimum. $W \subseteq G$ dikatakan sebagai *resolving set* dari G jika G memiliki representasi tunggal pada W yaitu ditentukan oleh jarak dari simpul-simpul di G terhadap simpul-simpul di W.

Banyak penelitian yang sudah dilakukan untuk mengetahui dimensi metrik dari suatu graf. Penelitian tersebut antara lain dilakukan oleh Saputro dkk dengan judul *The Metric Dimension of a Complete n-Partite Graphs and Its Products* [3] yang meneliti graf n-partisi komplit dengan operasi *cartesian* dan *corona* serta meneliti graf lintasan dan sikel. Ada juga Chartrand dkk dengan *Resolvability in Graphs and The Metric Dimension of a Graph* [4] pada tahun 2000 yang menghasilkan $\dim(P_n)$, $\dim(K_n)$, dan graf-graf yang mempunyai dimensi metriks $n-2$, juga oleh Jannesari dkk [9]. Selain itu ada juga penelitian dimensi metrik yang dikenakan pada *tree* dan graf bintang [2,6,7] yang diteliti oleh Khuller dkk, dan juga oleh Harary, graf Cayley [10] yang diteliti oleh Fehr dkk, pada *unicyclic graphs* [5] oleh Rodriguez dkk, pada graf bipartisi komplit [8], graf yang memiliki pendan [11] oleh Iswadi dkk, dan pada graf lintasan [12] oleh Fajjria. Pada paper ini akan ditentukan dimensi metrik dari graf Turan yang dinotasikan dengan $T_{k,n}$, yaitu graf multipartisi komplit yang mempunyai simpul total k simpul dan di setiap partisinya memiliki simpul sebanyak $\frac{k}{n}$. Namun pada paper ini penulis membatasi graf Turan yang akan dibahas, yaitu graf Turan yang mempunyai simpul total sebanyak k dengan partisi sebanyak n namun k terbagi habis dengan n sehingga $k = nx$. Dengan kata lain graf $T_{k,n}$ adalah graf multipartisi komplit dengan di setiap partisinya mempunyai jumlah simpul yang sama sebanyak x simpul.



(a)



(b)

Gambar 1: (a) Graf bipartisi komplit atau graf $T_{4,2}$
(b) Graf tripartisi komplit atau graf $T_{9,3}$

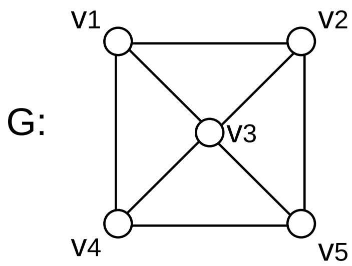
B. *Resolving Set* dan Dimensi Metrik dari Suatu Graf

Misal G adalah graf, V_G adalah himpunan simpul pada G dan E_G adalah himpunan sisi pada G. Jarak antara simpul $u, v \in G$ dinotasikan dengan $d(u,v)$ yaitu lintasan terpendek yang menghubungkan simpul u dan v di G. Misal $W \subseteq V_G$ dengan $W = \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_n\}$, $r(v|W) = \big(d(v,w_1), d(v,w_2), d(v,w_3), \dots, d(v,w_n)\big)$ adalah representasi v relatif terhadap W dengan $v \in G. W$ dikatakan sebagai *resolving set* (himpunan pembeda) dari G jika representasi simpul di G berbeda antara simpul satu dengan simpul yang lainnya. Sedangkan dimensi metrik dari suatu graf yang dinotasikan dengan $\dim(G)$ adalah kardinalitas terkecil dari *resolving set* (himpunan pembeda) W[4].

Sebagai contoh, [4] misal G adalah graf yang diberikan pada gambar 2. Diberikan $W_1 = \{v_1, v_3\}$ bukan *resolving set* dari G karena representasi W_1 pada G menghasilkan representasi yang sama, yaitu $r(v_2|W_1) = (1,1) = r(v_4|W_1)$. Sedangkan untuk $W_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$ adalah *resolving set* dari G karena representasi dari semua simpul di G berbeda, yaitu:

$r(v_1|W_2) = (0,1,1)$
$r(v_2|W_2) = (1,0,1)$
$r(v_3|W_2) = (1,1,0)$
$r(v_4|W_2) = (1,2,1)$
$r(v_5|W_2) = (2,1,1)$

Berikut adalah gambar graf G:



Gambar 2.

Meskipun demikian, W_2 bukan dimensi metrik dari G karena $W_3 = \{v_1, v_2\}$ juga *resolving set* dari G.

$r(v_1|W_3) = (0,1)$
$r(v_2|W_3) = (1,0)$
$r(v_3|W_3) = (1,1)$
$r(v_4|W_3) = (1,2)$
$r(v_5|W_3) = (2,1)$

Dari representasi di atas dapat diketahui bahwa representasi dari semua simpul oleh W_3 berbeda. Maka dapat dikatakan bahwa W_3 adalah *resolving set* dari G dengan kardinalitas minimum yaitu 2. Sehingga dimensi metrik dari G adalah $\dim(G) = |W_3| = 2$.

C. Dimensi Metrik dari Graf Turan

Pada paper ini akan ditunjukkan dimensi metrik dari graf Turan yang dinotasikan $T_{k,n}$, namun penulis membatasi graf Turan pada graf Turan yang mempunyai simpul total sebanyak k dengan partisi sebanyak n namun $k = n^2$.

Definisi 1. Graf Turan adalah graf multipartisi komplit yang mempunyai simpul total k simpul dan di setiap partisinya memiliki simpul sebanyak $\frac{k}{n}$ dengan n adalah jumlah partisinya [13].

Lemma 1. G adalah graf n-partisi komplit dengan $n \geq 2$ dan W adalah *resolving set* dari G. Misalkan $W' = G - W$ maka W' memuat paling banyak satu simpul dari setiap partisi. W' juga memuat paling banyak satu simpul dari semua partisi *singleton* [3].

Lemma 2. G adalah graf n-partisi komplit dengan $n \geq 2$. Misalkan W adalah *resolving set* dari G maka paling banyak satu simpul di G yang tidak dimuat oleh W [3].

Teorema 1. Misalkan $T_{k,n}$ adalah graf Turan dengan $k = n^2$ dan $n \geq 2$, maka

$$\dim(G) = k - n$$

Bukti.

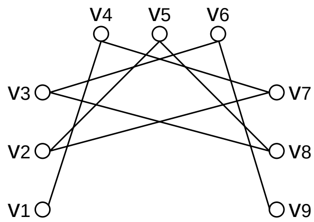
Untuk batas bawah dari $T_{k,n}$, dengan menggunakan lemma 2. Misalkan W adalah *resolving set* dari G. Andaikan terdapat dua simpul $v_1, v_2 \in V_G$ yang terletak pada satu partisi dengan $v_1, v_2 \notin W$. karena v_1 dan v_2 terhubung dengan simpul yang sama maka $r(v_1|W) = r(v_2|W)$. Hal ini tidak mungkin karena akan mengakibatkan representasi yang tidak berbeda sehingga W bukan *resolving set* dari G. Pernyataan ini kontradiksi dengan pernyataan bahwa W adalah *resolving set* dari G, maka haruslah v_1 dan v_2 berada pada partisi yang berbeda. Sehingga jika graf $T_{k,n}$ terpartisi menjadi n partisi maka terdapat n simpul dari partisi yang berbeda, sehingga jika $|V_G| = k$ maka $\dim(G) \geq k - n$.

Untuk batas atas misalkan $W' = \{v^1, v^2, v^3, \dots, v^n\}$ dengan $|W'| = n$ adalah satu simpul yang diambil dari partisi yang berbeda, dan W dapat dikatakan *resolving set* dari G, sehingga $W = G - W'$. Misal $v_1, v_2 \in V_G$ berlaku $r(v_1|W) = r(v_2|W)$. Jika v_1 atau v_2 di *resolving set* maka $v_1 = v_2$. Namun jika $v_1, v_2 \in W'$ maka v_1 dan v_2 berada pada partisi yang berbeda sehingga akan memiliki representasi yang berbeda karena $d\left(v_1, W_{v_2}\right) = d\left(v_2, W_{v_1}\right) = 1$ dan $d\left(v_1, W_{v_1}\right) = d\left(v_2, W_{v_2}\right) = 2$ dengan W_{v_1} adalah partisi yang memuat v_1 dan W_{v_2} adalah partisi yang memuat v_2. Misal $|V_G| = k$ sehingga $\dim(G) \leq k - n$. Karena batas bawah dari $\dim(G) \geq k - n$ dan batas atas dari $\dim(G) \leq k - n$, maka $\dim(G) = k - n$ dengan $G = T_{k,n}$.

***Remarks* 1.** Teorema 1 diperkuat oleh hasil sebelumnya, yaitu:

$$\dim(G) = \begin{cases} |V_G| - 1 - (n - m), & for\ m > 0 \\ |V_G| - n, & for\ m = 0 \end{cases}$$

Teorema 2. Graf Turan yang tidak komplit dan mempunyai order $\left|T_{k,n}\right| = k - 1$ dengan menjaga keterhubungan antara setiap simpul pada semua partisi memiliki dimensi metrik yaitu $\dim\left(\left|T_{k,n}\right| = k - 1\right) = 1$.

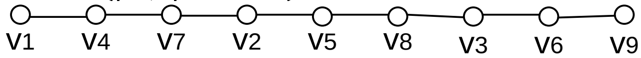


Gambar 3. Contoh graf Turan dengan order $\left|T_{k,n}\right| = k - 1$

Bukti.

Misalkan u dan v adalah simpul-simpul pada $T_{k,n}$ yang mempunyai order $k - 1$ dan jarak antara u dan v adalah $d(u, v) = d$ dengan $0 \leq d \leq k - 2$. Misal $u_i = v_i$ dengan $0 \leq i \leq k - 1$, untuk $u_0 \in W$ dan $W = V_G - (u_i - u_0)$. Karena $d(u_0, u_i) = i$ untuk $1 \leq i \leq k - 1$, maka $W = \{u_0\}$ adalah *resolving set* dengan minimum kardinalitas yaitu $k - 1 - d$. Karena untuk menghasilkan jarak yang terkecil, maka digunakan d maksimal yaitu $k - 2$. Sehingga untuk kardinalitas minimum dari W adalah $k - 1 - d = k - 1 - (k - 2) = k - 1 - k + 2 = 1$. Sehingga untuk graf $T_{k,n}$ dengan order $k - 1$ mempunyai dimensi metrik yaitu $\dim\left(\left|T_{k,n}\right| = k - 1\right) = 1$.

Jika graf Turan yang memiliki order $k - 1$ dijabarkan, graf tersebut membentuk graf lintasan dengan simpul sebanyak k dan order sebanyak $k - 1$. Sehingga dapat dikatakan bahwa dimensi metrik dari graf Turan yang memiliki order $k - 1$ sama dengan dimensi metrik dari graf lintasan P_k, yaitu $\dim\left(\left|T_{k,n}\right| = k - 1\right) = \dim(P_k) = 1$.

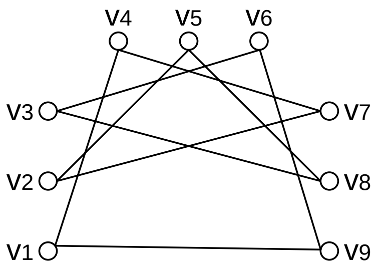


Gambar 4. Penjabaran dari graf Turan $T_{9,3}$ (gambar 3) yang memiliki order 8

***Remark* 2.** Teorema 2 diperkuat oleh hasil sebelumnya, yaitu:

a. Jika G adalah sebuah graf terhubung dengan order $n \geq 2$ dan diamater d, maka $f(n, d) \leq \dim(G) \leq n - d$
b. Sebuah graf terhubung G dengan order n mempunyai dimensi metrik 1 jika dan hanya jika $G = P_n$.

***Corollary* 2.** Graf Turan yang tidak komplit dan mempunyai order $|T_{k,n}| = k$ dan juga $\delta(T_{k,n}) = 2$ memiliki dimensi metrik yaitu $\dim(T_{k,n}) = 2$.



Gambar 5. Contoh graf Turan dengan order $|T_{k,n}| = k$ dan $\delta(T_{k,n}) = 2$

D. Daftar Pustaka

[1] F.K.N. Sari, *Spektrum Adjacency, Spektrum Laplace, dan Spektrum Signless-Laplace Graf Multipartisi Komplit* $K_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_n}$, UIN Malang, 2013.

[2] F. Harary, and R.A. Melter, *On The Metric Dimension Of A Graph*, Ars combin. 2 1076, 191-195.

[3] S.W. Saputro, E.T. Baskoro, A.N.M. Salman, dan D. Suprijanto, *the Metric Dimension Of A Complete n-Partite Graphs And Its Products*, ITB.

[4] G. Chatrand, L. Eroh., M. A. Johnson, dan O. R Oellermann, *Resolvability in Graphs and The Metric Dimension of a Graph*, Discrete Appl. Math., 105 (2000), 99-113.

[5] J.A. Rodriguez, I.G. Yero, dan H. Fernau, *On The Partition Dimension Of Unicyclic Graphs*, preprint, 2013.

[6] S. Khuller, B. Raghavachari, dan A. Rosenveld, *Landmarks in Graphs*, Discrete Appl. Math., 70 (1996), 217-229.

[7] J. Caceres, D. Garijo, M.L. Puertas, dan c. Seara, *On The Determining Number and The Metric Dimension Of Graphs*, Discrete Appl. Math., 17 (2010).

[8] M. Baca, E.T. Baskoro, A.N.M. Salman, S.W Saputro, dan D. Suprijanto, *The Metric Dimension Of Regular Bipartite Graphs*, Bull. Math. Soc. Math. Roumanie Tome, No. 1 (2011) 15-28.

[9] M. Jannesari, dan B. Omoomi, *The Metric Dimension Of The Composition Product Of Graphs*, Isfahan University.

[10] M. Fehr, S. Gosselin, dan O.R. Oellermann, *The Metric Dimension Of Cayley Digraphs*, Discrete Math. 306 (2006) 31-41.

[11] I. Iswadi, E.T. Baskoro, R. Simanjuntak, dan A.N.M. Salman, *The Metric Dimension Of Graphs with Pendant Edges*, J. Combin. Math. Combin. Comput., 65 (2008) 139-145.

[12] I.M.D. Fajjria, *Dimensi Metrik Graf Lintasan Tak Hingga*, UIN Malang, 2010.

[13] N. Faizah, *Spectrum Adjacency, Spectrum Detour dan Spectrum Laplace pada Graf Turan*, UIN Malang, 2012.